I 24758
CTR 104
vol IV
2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL IV

ANUL 1924—1925.

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1924

I 24758

ANUL IV. 15 MARTIE 1924 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. V. ALACI. O CLASA DE EXPRESIUNI NEDETERMINATE
2. NOTE MATEMATICE. 1, 2.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 270, 286, 288
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

2452

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abasohn Ernest,	inginer, licenţiat în matematici, profesor la liceul Cantemir. Justinian 18, Bucureşti.
Abramescu N.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Adamescu Maxim,	licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Flondor 37, Cernăuţi.
Arghir Iancu,	profesor la liceul din Târgu-Jiu.
Alaci Valeriu,	doctor în matematici, profesor la Şc. Politechnică Timişoara. Piaţa Doja 12, Timişoara.
Alexandrescu Elena,	profesoară la externatul secundar de fete din Constanţa.
Anghelescu A.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Angheluţă Th.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Balaban N.,	profesor liceul Carol I Craiova.
Balaban Gh.,	profesor liceul din Constanţa.
Balázs D.,	inginer, asist. la Şc. Politechnică Str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
Bănărescu M.,	inginer la atelierele C.F.R., profesor la Politechnică. Str. Doja 51, Timişoara.
Banciu I.,	profesor. Str. Lucaci 95, Bucureşti.
Baron C.,	asistent la catedra de fizică la Şc. Politechnică din Timişoara.
Blăşian V.,	inginer de mine, Subdirector general al Soc. Reşiţa, profesor la Şc. Politechnică. Str. Lonovici, Timişoara.
Botez Mihai,	prof. la Şc. Normală şi lic. mil. Str. Speranţei 12, Iaşi.
Bratu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Breazu D.,	profesor la liceul din Caracal.
Buicliu Gh.,	loc.-colonel în artilerie, director de studii la şc. specială a artileriei, profesor la Şc. Politechnică Timişoara.
Cândea C.,	doctor-inginer, profesor la Şc. Politechnică din Timişoara.
Caraman E.,	profesor la liceul V. Alexandri Str. Vulturul 20, Galaţi.
Cârdeiu V.,	profesor la liceul Dragoş-Vodă, Câmpulungul mold. (Bucov).
Chivulescu C.,	licenţiat în matematici, inspector financiar Târgovişte.
Cizmărescu N.,	licenţiat în matematici, inspector financiar T.-Severin.
Corneanu P.,	inginer la Soc. Româno-Americană Câmpina.
Cristescu I.,	inginer, profesor la Politechnica Timişoara.
Coman August,	directorul lic. Diaconovici-Loga Str. Feldioara 1, Timişoara.
Derigault A.,	licenţiat în fizică şi electrotehnică, inginer la Societ. Reşiţa, Reşiţa.
Diaconescu Nic.,	profesor la liceul din Slatina.
Dumitrescu I. Gh.,	profesor la liceul militar M-rea Dealu, Târgovişte.
Dumitrescu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Dumitriu Arad I.,	profesor la liceul Moise Nicoară, Str. Bucur 3, Arad.
Duţulescu Marin,	licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Eminescu 20, Bucureşti.
Florescu P. M.,	inginer, inspector silvic. Str. Alex. Orescu 9, Bucureşti
Georgescu Dumitru,	profesor la liceul din Piteşti.
Ghermănescu Mihail,	profesor la liceul Cantemir. Str. Raion 31, Bucureşti.
Hubert M.,	inginer, profesor la şc. de meserii, asist. la Şc. Politechnică Bul. Mihai-Viteazul 21, Timişoara.
Hristea Horaţiu,	inginer la depoul de maşini, asistent la Şc. Politechnică Timişoara.
Ionescu K. C.,	profesor liceul real din Braşov.
Jecu M. Ion,	licenţiat în matematici. Str. V. Lascar (Teilor) 77, Buc.
Lalescu Traian,	doctor în matematici, profesor la Universitatea şi Şc. Politechnică din Bucureşti, fost rector la Şc. Politechnică din Timişoara, deputat. Str. V. Boerescu 19, Bucureşti.
Linteş I., căpitan,	şcoala de artilerie, Timişoara.
Liteanu Gh.,	maior în artilerie. Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
Lupan Andrei,	inginer, director la Soc. Reşiţa, profesor la Şc. Politechnică. Str. Lonovici, Timişoara
Manughevici C.,	ing.-chimist, şef de lucrări la Şc. Politechnică din Timişoara. Str. Paul Chinezul 7, Timişoara
Mardan D.,	inginer de mine, directorul fabricei de tutun, profesor la Şc. Politechnică din Timişoara Fab. de tutun, Timişoara.
Mihaly Elemér	profesor la liceul Decebal. Deva.
Muzicescu M.,	profesor la liceul Traian. T.-Severin.

Nichifor Gh.,	doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, profesor secundar. Str. Racoviţă 32, Bucureşti.
Noaghea G.,	profesor liceul din Caransebeş.
Orăşeanu Cezar,	inginer, licenţiat în matematici, profesor la Şcoala Politechnică Bucureşti.
Orăşeanu Grigorie,	prof. la liceul St. Petru şi Pavel. Ploeşti.
Petrescu A.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Petricoane D. M.,	directorul liceului din Oraviţa.
Purcariu Ilie,	director General în Ministerul Instrucţiei.
Roibănescu C ,	direct. liceului T.-Vladimirescu. Tg.-Jiu.
Protopopescu I.,	inginer, subdirectorul Şc. Politechnice Timişoara.
Saegiu E.,	inginer, serviciul construcţii C. F. R. Str. Berzei 70, Bucureşti.
Sergescu P.,	profesor la liceul Traian. Rue Blainville 6, Paris.
Simniceanu Sava,	directorul şcoalei normale. Craiova.
Spineanu Cezar,	profesor şi deputat. Târgovişte.
Stăncescu C.,	doctor-inginer, profesor la Şc. Politechnică din Timişoara. Str. Bem 8, Timişoara.
Ştefănescu C.,	chimist la Şc. Politechnică din Timişoara. Str. Mărăşeşti 6, Timişoara
Stoicescu M. G.,	profesor. Str. Zefirului 4, Buc.
Severineanu C.,	inginer, subdirectorul Serviciului Direcţiunii C. F. R., profesor la Şc. Politechnică Timişoara.
Teodorescu C.,	inginer, prof. la Şc. Politechnică. direct. şc. superioare P. T. T. Palatul Poştelor. Timişoara
Tepeneag E.,	directorul şcoalei comerciale din Orşova.
Thiérin Gh.,	profesor, dir. Institutului Schewitz-Thiérin. Str. Scaune 33, Bucureşti.
Toporescu E.,	doctor în chimie dela Sorbona, chimist la Soc. Steaua-Română Câmpina.
Teodoriu Arsenie,	doctor în matematici, profesor la Academia de Agricultură şi astronom la Universitate. Cluj.
Ţino Ovidiu,	profesor liceul Şincai. Str. Cornea 80, Buc.
Vâlcovici V.,	doctor în matematici, rectorul Şc. Politechnice din Timişoara Str. Doja 33, Timişoara.
Vasiliu M.,	inginer în Ministerul Industriei asistent la Şc. Polit. din Buc. Str. Dr. Obedenaru 10, Buc.
Vlad I. V.,	inginer-arhitect, profesor la Şc. Politechnică din Timişoara. Str. Bonnaz 20, Timişoara.
Vasiliu Gh.,	inginer la depoul C. F. R. Str. Gen. Foch 25, Timişoara.
Zapan Grigore,	căpitan de artilerie, inginer hotarnic, profesor la lic. Mihai-Viteazul, Tg.-Mureş.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

ANUL IV. — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

O CLASA DE EXPRESIUNI NEDETERMINATE

de V. ALACI

1. In „*Gazeta Matematică*“, an. III-lea, pag. 125, d-l profesor *A. G. Ioachimescu*, își propune a determina adevărata valoare a unei fracțiuni de forma:

$$u = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

(unde $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sunt polinoame), care se reduce la $\frac{0}{0}$, pentru un sistem de valori date lui x și y, cari valori verifică o ecuațiune algebrică, $f(x, y) = 0$. Metoda întrebuințată de d-l profesor *A. G. Ioachimescu*, are meritul de a fi o metodă elementară, dar care nu se aplică decât în cazul când $P(x, y)$, $Q(x, y)$ și $f(x, y)$ sunt polinoame și din punct de vedere practic, nu este destul de simplă.

D-sa enunță și o generalizare a chestiunii, în senzul următor:

„Fiind dată o fracțiune rațională în raport cu literile $x, x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$u = \frac{P(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{Q(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

în care variabilele $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ *sunt legate prin* n *relații algebrice.*

$$\begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

și presupunând că pentru un sistem de valori date lui $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, *care verifică relațiile date,* u *este de forma* $\frac{0}{0}$, *să se determine adevărata ei valoare.*

Vom trata aceiași chestiune, însă vom îmbrățișa cazul general, când funcțiunile $P(x, y)$, $Q(x, y)$ și $f(x, y)$ nu mai sunt polinoame, ci funcțiuni oarecare. Vom întrebuința în acest scop o altă metodă, care ne va conduce la o regulă practică simplă, care se menține și în cazul mai general subliniat mai sus, funcțiunile din enunț presupunându-le însă, oarecare.

Regula la care vom ajunge, vom arăta că se menține și în cazul când u ar lua forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$, toate condițiile din ipoteză menținându-se.

2. *Ne propunem a afla adevărata valoare a expresiunii:*

$$(1) \qquad u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ *pentru* $x = x_1$ $y = y_1$ *soluțiuni a ecuației:*

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

toate funcțiunile sunt presupuse continue și admițând derivate parțiale de primul ordin, finite, pentru $x = x_1$, $y = y_1$.

Dacă am putea rezolvi ușor ecuațiunea (2) în raport cu una din variabile și am înlocui valoarea găsită în (1), u ar depinde de o singură variabilă și pentru o valoare particulară a ei ar lua forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Acest caz se știe însă studia.

Dacă acest lucru nu-i posibil, sau nu voim să facem această rezolvire, atunci în virtutea relațiunii

(2), putem privi pe $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ ca funcțiuni compuse de x de exemplu, x intrând direct și prin intermediarul lui y, u depinzând astfel numai de x, și luând forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, pentru $x=x_1$, y având valoarea y_1. Putem aplica teorema lui *Hôpital*, fiind atenți la derivare și avem:

$$(3)\quad u = \lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = \lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y)}{\varphi'_x(x, y) + y' \varphi'_y(x, y)}$$

unde y' se calculează din relația (2). In adevăr, derivând relația (2) în raport cu x, avem:

$$\psi'_x(x, y) + y' \psi'_y(x, y) = 0$$

$$y' = -\frac{\psi'_x(x, y)}{\psi'_y(x, y)}$$

Inlocuind valoarea găsită pentru y' în (3) și scăpând de numitor presupunând $\psi'_y(x_1, y_1) \neq 0$, obținem:

$$u = \lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} =$$

$$\lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{f'_x(x, y)\psi'_y(x, y) - f'_y(x, y)\psi'_x(x, y)}{\varphi'_x(x, y)\psi'_y(x, y) - \varphi'_y(x, y)\psi'_x(x, y)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

Putem deci enunța următoarea regulă: *Adevărata valoare a unei expresiuni:*

$$u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$, *pentru* $x=x_1$, $y=y_1$ *soluțiuni a ecuației;*

$$\psi(x\, y) = 0,$$

este câtul determinanților funcționali al funcțiunilor $f(x, y)$, $\psi(x, y)$ *și* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *pentru* $x=x_1$, $y=y_1$, *adică:*

$$(4)\quad u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

când această valoare este determinată.

Când și aceasta ia forma $\frac{0}{0}$, aplicăm din nou regula enunțată condițiile din enunț presupuse împlinite.

Observare. Regula stabilită se aplică și în cazul când, $x_1 = y_1 = \infty$.

Pentru a invedera aceasta, punem:

$$x = \frac{1}{t},\quad y = \frac{1}{z}$$

și atunci::

$$u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = \frac{f\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right)},$$

$$\psi(x, y) = \psi\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) = 0.$$

Pentru $t=z=0$, u ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ și ecuația $\psi\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) = 0$ este verificată, putem deci aplica regula enunțată.

$$u = \lim_{x=y=\infty} \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = \lim_{t=z=0} \frac{f\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right)} =$$

$$\lim_{t=z=0} \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{t^2} f'_x\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) & -\frac{1}{z^2} f'_y\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) \\ -\frac{1}{t^2} \psi'_x\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) & -\frac{1}{z^2} \psi'_y\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{t^2} \psi'_x\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) & -\frac{1}{z^2} \psi'_y\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) \\ -\frac{1}{t^2} \psi'_x\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) & -\frac{1}{z^2} \psi'_y\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{z}\right) \end{vmatrix}}$$

Simplificând și revenind la variabilele x și y,

găsim și în acest caz pentru adevărata valoare a lui u:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

Regula se aplică și în caz când x_1 sau y_1 numai, este infinit.

3. *Ne propunem acum, a determina adevărata valoare e expresiunii:*

$$u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

care ia forma $\frac{\infty}{\infty}$, *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, *soluțiuni a ecuației:*

$$\psi(x, y) = 0,$$

funcțiunile din enunț fiind presupuse continue și admițând derivate parțiale de primul ordin, finite, pentru $x = x_1$ $y = y_1$.

Putem scri:

$$u = \frac{\frac{1}{\varphi(x, y)}}{\frac{1}{f(x, y)}}$$

expresiune care ia forma $\frac{0}{0}$, pentru $x = x_1$, $y = y_1$ soluții a ecuației;

$$\psi(x, y) = 0.$$

Regula enunțată mai sus, — A fiind adevărata valoarea a lui u —, ne dă:

$$A = \lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{\frac{1}{\varphi(x, y)}}{\frac{1}{f(x, y)}} =$$

$$\lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi^2(x, y)} & -\frac{\varphi'_y(x, y)}{\varphi^2(x, y)} \\ \psi'_x(x, y) & \psi'_y(x, y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{f'_x(x, y)}{f^2(x, y)} & -\frac{f'_y(x, y)}{f^2(x, y)} \\ \psi'_x(x, y) & \psi'_y(x, y) \end{vmatrix}}$$

$$= \lim_{x=x_1,\ y=y_1} \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x, y) & \varphi'_y(x, y) \\ \psi'_x(x, y) & \psi'_y(x, y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ \psi'_x(x, y) & \psi'_y(x, y) \end{vmatrix}} \cdot \frac{f^2(x, y)}{\varphi^2(x, y)}$$

$$= A^2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_x(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

Dacă $A \neq 0$, simplificând cu A, deducem:

$$u = A = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_x(x_1, y_1) \\ \psi'_y(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

Dacă $A = 0$, atunci considerăm expresiunea:

$$u + a = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} + a = \frac{f(x, y) + a\varphi(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

care ia forma $\frac{\infty}{\infty}$, pentru $x = x_1$, $y = y_1$ soluțiuni a ecuației $\psi(x, y) = 0$, și a cărei limită este a, presupus $\neq 0$, suntem deci în cazul de mai sus și avem:

$$u + a = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) + a\varphi'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) + a\varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}} + a$$

de unde:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_x(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

In fine dacă $A = \infty$, atunci considerăm expresiunea:

$$\frac{1}{u} = \frac{\varphi(x, y)}{f(x, y)}$$

In toate aceste cazuri găsim aceiaşi regulă, anume:

Adevărata valoare a unei expresiuni:

$$u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

care ia forma $\frac{\infty}{\infty}$, *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$ *soluţiuni a ecuaţiei:*

$$\psi(x, y) = 0,$$

este câtul determinanţilor funcţionali al funcţiunilor $f(x, y)$, $\psi(x, y)$ *şi* $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, adică aceiaşi regulă rezumată în formula (4):

4. *A 2-a metodă.* Putem soluţiona chestiunea, aflărei adevăratei valori a expresiunei:

$$u = \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ pentru $x = x_1$, $y = y_1$ soluţii a ecuaţiei, $\psi(x, y) = 0$, folosind dezvoltarea lui *Taylor.*

Prin definiţie adevărata valoare a lui u, este

$$u = \lim_{h=0,\ k=0} \cdot \frac{f(x_1 + h,\ y_1 + k)}{\varphi(x_1 + h,\ y_1 + k)}$$

şi dezvoltarea după formula *Taylor*, ţinând seama că:

$$f(x_1 y_1) = \varphi(x_1 y_1) = 0,$$

ne dă:

$$(5) \qquad u = \lim_{h=0,\ k=0} \cdot \frac{\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{h}{2!}\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta f}{\delta y}\right)^{(2)} + \cdots \frac{h^{n-2}}{(n-1)!}\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta f}{n\delta}\right)^{(n-1)} + \frac{h^{n-1}}{n!}\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta f}{\delta y}\right)^{(n)}}{\frac{\delta \varphi}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta \varphi}{\delta y} + \frac{h}{2!}\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)^{(2)} + \cdots \frac{h^{n-2}}{(n-1)!}\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x} + \frac{k}{h}\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)^{(n-1)} + \frac{h^{n-1}}{n!}\left(\frac{\delta \varphi}{\delta y} + \frac{k}{h}\frac{\delta \varphi}{\delta y}\right)^{(n)}}$$

unde x, y se vor înlocui pretutindeni prin x_1, y_1, afară de ultima paranteză dela numărător şi numitor, unde x, y se înlocuesc respectiv prin $x_1 + \theta h$, $y_1 + \theta h$, iar puterile simbolice (n), ne reamintesc să înlocuim δf^n, $\delta \varphi^n$ prin $\delta^n f$, $\delta^n \varphi$.

In virtutea relaţiei:

$$\psi(x, y) = 0,$$

privim pe y ca funcţie implicită de x, şi avem:

$$(6) \qquad \lim_{h=0,\ k=0} \cdot \frac{k}{h} = y' = -\frac{\psi'_x(x, y)}{\psi'_y(x, y)}$$

Dacă cel puţin una din derivatele parţiale de primul ordin este $\neq 0$, atunci din (5), deducem:

$$u = \frac{f'_x + y' f'_y}{\varphi'_x + y' \varphi'_y}$$

y' având valoarea dată de (6), şi înlocuind x şi y prin x_1, y_1, găsim astfel aceiaşi regulă dată mai sus, rezumată în formula (4).

Putem încă presupune că toate derivatele parţiale ale lui $f(x, y)$ şi $\varphi(x, y)$ până la acelea de ordinul $(n-1)$ inclusiv, sunt nule, pentru $x = x_1$, $y = y_1$, cele de ordinul n nefiind toate nule. In acest caz adevărata valoare a lui u, dedusă din (5) este:

$$(7) \qquad u = \frac{\left(\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx}\right)^{(n)}}{\left(\frac{\delta \varphi}{\delta x} + \frac{\delta \varphi}{\delta y}\frac{dy}{dx}\right)^{(n)}}$$

unde vom face $x = x_1$, $y = y_1$, iar derivatele

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}$$

le vom calcula pe rând, derivând succesiv de n ori în raport cu x, ecuaţia, $\psi(x, y) = 0$.

Aplicaţii. Primele două exemple ce urmează sunt tratate în articolul citat al d-lui profesor *A. G.*

Ioachimescu, noi le vom soluționa însă prin metoda expusă mai sus.

1). *Să se afle limita expresiunii.*

$$u=\frac{(3x+5)y+4x^2-5x-35}{(2x+7)y+3x^2-7x-19}$$

pentru $x=3,\ y=1$ soluții a ecuației:

$$2y^2-6xy+x^2-x+10=0.$$

Pentru $x=3,\ y=1$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem folosi deci, formula (4).

Observăm însă că:

$$f'_x(x,y)=3y+8x-5,\quad f'_y(x,y)=3x+5$$

$$\varphi'_x(x,y)=2y+6x-7,\quad \varphi'_y(x,y)=2x+7$$

$$\psi'_x(x,y)=-6y+2x-1,\quad \psi'_y(x,y)=4y-6x.$$

Pentru $x=3,\ y=1$, deducem:

$$f'_x(3,1)=22,\ f'_y(3,1)=14,\ \varphi'_x(3,1)=13,$$

$$\varphi'_y(3,1)=13,\ \psi'_x(3,2)=-1,\ \psi'_y(3,1)=-14.$$

Formula (4), ne dă:

$$u=\frac{\begin{vmatrix}22 & 14\\ -1 & -14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}13 & 13\\ -1 & -14\end{vmatrix}}=\frac{14(-22+1)}{13(-14+1)}=\frac{14\times 21}{13^2}$$

care este adevărata valoare a lui u.

2). *Să se afle limita expresiunii:*

$$u=\frac{2y^3-7xy^2+x^2-2}{y^3+(2x+3)y+x^2-4}$$

pentru $x=0,\ y=1$, *soluții a ecuației:*

$$3y^4-5xy^3+(6x^3-5x+1)y+x^4-3x^3+x-4=0$$

Pentru $x=3,\ y=1$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem folosi deci, formula (4).

Observăm însă, că:

$$f'_x(x,y)=-7y^2+2x\quad f'_y(x,y)=6y^2-14xy,$$

$$\varphi'_x(x,y)=2y+2x\quad \varphi'_y(x,y)=3y^2+2x+3$$

$$\psi_x(x,y)=-5y^3+(18x^2-5)y+4x^3-6x+1$$

$$\psi'_y(x,y)=12y^3-15xy^2+6x^3-5x+1.$$

Pentru $x=0,\ y=1$, deducem:

$$f'_x(0,1)=-7,\quad f'_y(0,1)=6,\quad \varphi'_x(0,1)=2,$$

$$\varphi'_y(0,1)=6,\quad \psi'_x(0,1)=-9,\quad \psi'_y(0,1)=13.$$

Formula (4), ne dă:

$$u=\frac{\begin{vmatrix}-7 & 6\\ -9 & 13\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 6\\ -9 & 13\end{vmatrix}}=-\frac{37}{80}$$

care este adevărata valoare a lui u.

3). *Să se afle limita expresiunii:*

$$u=\frac{\sin y^2(x-a)+\sin x^2(y-b)}{x^2+y^2+xy-a^2-b^2-ab}$$

pentru $x=a,\ y=b$, *soluții a ecuației:*

$$e^{yx-a}+e^{x(y-b)}-2=0.$$

Pentru $x=a,\ y=b$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem deci folosi formula (4).

Observăm însă, că:

$$f'_x(x,y)=y^2\cos y^2(x-a)+2x\cos x^2(y-b)$$

$$f'_y(x,y)=2y\cos y^2(x-a)+x^2\cos x^2(y-b)$$

$$\varphi'_y(x,y)=2x+y,\quad \varphi'_y(x,y)=2y+x$$

$$\psi'_x(x,y)=ye^{y(x-a)}+(y-b)e^{xy-b)}$$

$$\psi'_y(x,y)=(x-a)e^{y(x-a)}+xe^{xy-b)}$$

Pentru $x=a,\ y=b$, deducem:

$$f'_x(a,b)=b^2,\ f'_y(a,b)=a^2,\ \varphi'_x(a,b)=2a+b$$

$$\varphi'_y(a,b)=2b+a,\quad \psi'_y(a,b)=b,\quad \psi'_y(a,b)=a.$$

Formula (4) ne dă:

$$u=\frac{\begin{vmatrix}b^2 & a^2\\ b & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a+b & 2b+a\\ b & a\end{vmatrix}}=\frac{ab(b-a)}{2(a^2-b^2)}=-\frac{ab}{2(a+b)}$$

care este adevărata valoare a lui u.

4). *Să se afle limita expresiunii:*

$$u = \frac{\operatorname{tg} y\,(x-a) + \operatorname{tg} x\,(y-b)}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}$$

pentru $x = a$, $y = b$, soluții a ecuației:

$$e^{x-y} + x - y - e^{a-b} - a - b = 0.$$

Pentru $x = a$, $y = b$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem folosi deci, formula (4).

Observăm însă, că:

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{\cos^2 y\,(x-a)} + \frac{y-b}{\cos^2 x\,(y-b}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x-a}{\cos^2 y\,(x-a)} + \frac{x}{\cos^2 x\,(y-b)}$$

$$\varphi'_x(x, y) = 2x, \qquad \varphi'_y(x, y) = 2y$$

$$\psi'_x(x, y) = e^{x-y} + 1, \qquad \psi'_y(x, y) = -e^{x-y} - 1$$

Pentru $x = a$, $y = b$, deducem:

$$f'_x(a, b) = b, \quad f'_y(a, b) = a, \quad \varphi'_x(a, b) = 2a,$$

$$\varphi'_y(a, b) = 2b, \quad \psi'_x(a, b) = e^{a-b} + 1,$$

$$\psi'_y(a, b) = -e^{a-b} - 1.$$

Formula (9), ne dă:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ e^{a-b}+1 & -e^{a-b}-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ e^{a-b}+1 & -e^{a-b}-1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

care este adevărata valoare a lui u.

(Va urma).

NOTE MATEMATICE

1. *Calculul rapid al patratelor numerelor terminate cu 5.*

In *„Revista de Matematicas y Fisicas Elementales“* (V, 151), se dă o regulă pentru calculul rapid al patratului unui număr de 2 cifre terminat cu 5, fără a se arăta de unde rezultă acea regulă.

Observăm că acea regulă este generală, putându-se aplica și numerelor de mai multe cifre, terminate cu 5.

In adevăr, fie N un număr oarecare de mai multe cifre terminat cu 5. Punând:

$$N = 10a + 5$$

avem: $N^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$

$$\text{sau} \quad N^2 = 100a(a+1) + 25.$$

Din această egalitate deducem regula următoare: *Putem afla patratul unui număr terminat cu 5, lăsând deoparte pe 5 și înmulțind numărul astfel rămas cu numărul imediat superior, iar la finele acestui produs scriind 25.*

Exemple:

$$15^2 = 1 \cdot 2 \cdot 100 + 25 = 225$$

$$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1225$$

$$95^2 = 9 \cdot 10 \cdot 100 + 25 = 9025$$

$$105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25 = 11025$$

$$395^2 = 39 \cdot 40 \cdot 100 + 25 = 156025$$

$$995^2 = 99 \cdot 100 \cdot 100 + 25 = 990025$$

$$2375^2 = 237 \cdot 238 \cdot 100 + 25 = 5640625$$

. . . . . .

. . . . . .

Se vede ușor că această regulă este foarte practică pentru numerele de 2 cifre. Dar sunt și numere de mai multe cifre al căror patrat poate fi calculat în adevăr repede.

De exemplu:

$$\underbrace{100\ldots0}_{n}5^2 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n}25$$

$$\underbrace{99\ldots9}_{n}5^2 = \underbrace{99\ldots9}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}25.$$

CAP. GR. ZAPAN

2. *Calculul lungimei unei ceviene.* Imi propun ca să dau o soluțiune chestiunei care se referă a calculul lungimei unei ceviene, când cunoaștem raportul, în care ea împarte latura corespunzătoare, diferită de soluțiunea lui *Stewart*.

Fie ABC un triunghiu oarecare și un punct A' pe latura BC, astfel ca $\frac{A'B}{A'C}=\lambda$, îmi propun să calculez lungimea AA'.

Prin punctul A' duc dreptele $A'B'$ și $A'C'$ paralele respectiv cu AB și AC care taie laturile AC și AB respectiv în punctele B' și C'. Se vede ușor că figura $AB'A'C'$ este un paralelogram deci:

$$AB'=A'C', \text{ și } \widehat{AB'A'}=180^0-\hat{A}$$

în triunghiul $AA'B$ putem scrie:

$$(1)\quad \overline{AA'}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{B'A}^2+2\,\overline{A'B'}\,.\,\overline{B'A}\cos A.$$

Dar din triunghiurile asemenea $CB'A'$, CAB; $BC'A'$, BAC ținând seama de raportul $\frac{A'B}{A'C}=\lambda$ deducem:

$$\overline{A'B'}=\frac{\overline{AB}}{1+\lambda}=\frac{c}{1+\lambda};$$

$$\overline{A'C'}=\overline{AB'}=\frac{AC\lambda}{1+\lambda}=\frac{b\lambda}{1+\lambda}$$

și înlocuind în (1) avem:

$$\overline{AA'}^2=\frac{c^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2b^2}{(1+\lambda)^2}+2\frac{\lambda bc\cos A}{(1+\lambda)^2}$$

dar $2bc\cos A=b^2+c^2+a^2$ și înlocuind avem:

$$(2)\quad \overline{AA'}^2=\frac{c^2(1+\lambda)+b^2(1+\lambda)\lambda-a^2\lambda}{(1+\lambda)^2}$$

$$=\frac{c^2+\lambda b^2}{1+\lambda}-\frac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}$$

$$(3)\quad \overset{*}{**}\quad \overline{AA'}=\sqrt{\frac{c^2+\lambda b^2}{1+\lambda}-\frac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}}$$

Observațiuni. Dacă facem în expresia (3) $\lambda=1$, atunci $\overline{AA'}$ e mediană și

$$\overset{*}{**}\quad \overline{AA'}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

Cu ajutorul relației (2) putem rezolva următoarea problemă: *Dacă punctele* A', B', C' *împart în același sens, în același raport respectiv laturile* BC, CA *și* AB *ale unui triunghiu* ABC, *suma* $\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2$ *e minimă, când* A', B', C' *sunt picioarele medianelor corespunzătoare laturilor* BC, CA, AB, *cu alte cuvinte când* AA', BB', CC' *sunt medianele triunghiului* ABC.

Prin permutări circulare în (2) deducem valorile $\overline{BB'}^2$, $\overline{CC'}^2$ și putem scrie:

$$\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2=\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2+2\lambda+1}(a^2+b^2+c^2)$$

variația sumei $\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2$, depinde de variația raportului $\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda^2+2\lambda+1}$ a cărui derivată se anulează pentru $\lambda=1$ trecând dela negativ la pozitiv, deci rezultă că suma $\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2$ e minimă când AA', BB', CC' sunt mediane, iar atunci

$$\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Dacă facem $\lambda=\infty$ deducem:

$$\overset{*}{**}\quad \overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2=a^2+b^2+c^2$$

ceiace e evident.

DILI C. SCHILERU

BIBLIOGRAFIE

1. *Societatea Română de Științe.* Buletinul de Științe Matematice pure și aplicate, anul XXVI, Iulie, Decembrie 1923, N-rile 4—6, cuprinde: Sur la distribution des zeros d'une fonction analitique au voisinage d'un point singulier, par *I. Soula*, Maître de conférences de à l'Université de Montpellier. Le tricinètisme, conférence de *Mr. A. Lartigue*, ingénieur en chef de la société *Thomson-Houston*. Sur l'addition des noyaux non orthogonaux, par *M. Tr. Lalesco*, professeur à l'Université de Bucarest. Scalaires vecteurs, tenseurs, par *Tr. Lalesco*.

Sur une propriété fonctionnelle des spirales logarithmiques, par *A. Angelesco*, professeur à l'Université de Cluj.

Asupra integralei lui *Poisson*, de *Mihail Ghermănescu*, profesor. Procesele-verbale ale ședințelor „Societății Române de Științe" din 1 Ianuarie, 5 și 19 Fevruarie, 5 și 19 Martie, 7, 21 și 30 Mai, 18 și 26 Iunie 1923, sub președenția d-lui Traian Lalescu și I. Ionescu.

2. *Gazeta Matematică*, anul XXIX, No. 6. Fevruarie 1924. Asupra unei formule a lui Hermite, de *A. Angelescu*. Teoreme asupra triunghiului (urmare) de *Grigore C. Moisil*.

3. *Jurnal Matematic*, vol. I, No. 3, 1 Fevruarie 1924. Generalizarea teoremelor lui *Franke* și *Kariya*, de *Tib. Popovici*.

4. *Jurnal Matematic*, vol. I, No. 4, 15 Fevruarie 1924. Generalizarea teoremelor lui *Franke* şi *Kariya*, de *T. Popovici*. O generalizare de *Al. I. Stoenescu*.

5. *A. Angelescu*. Sur certaines équations différentielles linéaires, 6 Octomvrie 1923, extras din Buletinul „Societăţii de Ştiinţe" din *Cluj*, tomul II, pag. 10—22.

6. *A. Angelescu*. Sur une proposition de *Stieltjes*, din Buleţinul „Societăţii de Ştiinţe" din *Cluj*, tomul II, pag. 52—54, 15 Decemvrie 1913, (extras.)

7. *A. Angelescu*. Sur les fonctions génératrices des polynomes d'Hermite, din „Buletinul de Ştiinţe" din *Cluj*, tomul II, pag. 55—62, 15 Decemvrie 1923, (extras).

8. *P. Sergesco*. Extension aux noyaux symétrisables des théorémes de *M. Weyl*. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 7 Janvier 1924).

PROBLEME REZOLVATE

270. — *Dacă,* $x+y+z=0$, *atunci;*

$$(x^5+y^5)^{33}+z^{55}(z^2-3xy)^{55},$$

se divide prin: $x^3+y^3+z^3$.

V. ALACI

Soluţiune dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bălean G.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Bârglăzan N. Aurel* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Bercovici Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciută Gh.* (Timişoara), *Coşniţă Virgil* (lic. Bârlad), *Cretoiu A.* (Bucureşti), *Critz Mendel* lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Georgescu C. Ioan* (lic. Piteşti), *Herscovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Mihailescu Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Niculescu Alexandru* (student), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Popovici D. Puiu* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Pol. Timişoara), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Silion G. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatescu I. Valeriu* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stambuleanu A.* (Şc. Polit. Timişoara), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu) şi *Vătăşan Ovid* (lic. Braşov).

Din relaţia de condiţie, deducem:

$$z=-(x+y),$$

şi atunci putem scrie:

$$(1)\qquad (x^5+y^5)^{33}+z^{55}(z^2-3xy)^{55}=$$

$$(x^5+y^5)^{33}-(x+y)^{55}[(x+y)^2-4xy]^{55}$$

$$(2)\quad x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=-3xy(x+y)$$

Dacă vom arăta că relaţia (1) se divide cu factorii literari din (2), problema este rezolvată.

In adevăr controlăm uşor că expresia:

$$(x^5+y^5)^{33}-(x+y)^{55}[(x+y)^2-3xy]^{55},$$

se anulează pentru: $x=0$; $y=0$; şi pentru $x=-y$, ceiace arată că expresia se divide cu x, y şi $x+y$ şi deci şi cu produsul lor, adică tocmai ce trebuia arătat.

Observare: D-nii: 1. *Angelescu N. Traian, Popovici D. Puiu, Popovici Th. Ioan, Răduleţ B. Remus, Ştefănescu Emil, Tauber Alexandru şi Teodorescu M. D-tru*, au generalizat chestiunea; în sensul: *Dacă,* $x+y+z=0$, *atunci:*

$$(x^{m+1}+y^{2m+1})^{2n+1}+z^p(z^q+kx^iy^j)^r$$

se divide prin; $x^3+y^3+z^3$, când:

$$(2m+1)(2n+1)=p+qr.$$

2. D-nii: *Răduleţ B. Remus* şi *Ştefănescu Emil* au dat şi alte generalizări:

286.—*Să se găsească un număr de cinci cifre, cub şi patrat perfect, astfel ca numărul format din ultimele trei cifre să fie patratul numărului format din ultimele două cifre, iar acesta să fie şi el patratul cifrei a doua.*

IONESCU PAUL

Soluţie dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Haimovici D. M.* (lic. Naţional, Iaşi).

N numărul cerut, fiind un cub perfect, trebue să avem:

$$N = m^3, \tag{1}$$

m întreg și pozitiv. In acelaș timp N fiind și patrat perfect, trebue ca:

$$\sqrt{N} = m\sqrt{m}$$

să fie întreg, deci m trebue să fie de forma:

$$m = n^2,$$

și atunci din (1) rezultă:

$$N = n^6$$

N fiind de cinci cifre, trebuie ca:

$$10000 \leq n^6 < 100000$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \sqrt[6]{10000} \leq n < \sqrt[6]{100000}$$

n fiind întreg nu putem lua decât:

$$n = 5 \quad \text{și} \quad n = 6,$$

în care cazuri:

$$N = 15625, \quad N = 46656.$$

Cercetând celelalte condiții din enunț, găsim că numai:

$$N = 15625$$

este soluție a problemei.

Observări. 1. Enunțul este prea abondent, s'ar fi putut cere numai: *să se găsească un număr de cinci cifre cub și patrat perfect, astfel ca numărul format de ultimele două cifre (sau ultimele trei cifre) să fie patrat perfect.* Găsiam evident aceiași soluție.

2. D-l *Angelescu N. Traian* a arătat în mod analog ca mai sus, că numerile care sunt în acelaș timp cuburi și patrate perfecte, de o cifră, două, trei, patru și șase cifre, sunt respectiv:

$$1 = 1^6,\ 64 = 2^6,\ 729 = 3^6,\ 4096 = 4^6,\ 117649 = 7^6,$$

$$262144 = 8^6 \text{ și } 531441 = 9^6.$$

Alte soluții date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (lic. Național, Iași), *Barbu Alexandru* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Baștа D. Gh.* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Bârglăzan Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Cantacuzino I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Șc. Polit. Timișoara), *Comănescu Bălteni* (Olt), *Critz Mendel* (lic. Mihai Viteazul, București), *Diaconu Gh.* (lic mil. Tg.-Mureș), *Dumitrescu Alex.* (Seminarul Pedagogic, București), *Dumitrescu N. Savu* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Flickstein I.* (Cernăuți), *I. N. Georgescu-Val.*, *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, București), *Grigorescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Grofșorean I. George*, (lic. Arad), *Herscovici Emanuel* (lic. Galați), *Kerdésc Paul* (lic. Arad), *Iliescu Șt Dima* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Iliescu Dan Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Iulian Emil* (lic. Giurgiu), *Katz Pincu* (Galați), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Mitescu D. Remdecht* (lic. mil Tg.-Mureș), *Nicolescu Angelo* (lic. M-rea Dealu), *Nicolescu P. Vasile* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Argentoia* (Șc. de Artilerie), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popescu Den. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici Chr. Jean* (lic. Galați), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Sergheiev A. Ioan* (lic. Chișinău), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei-Basarab, București), *Stamatescu I. Val.* (Seminarul Pedagogic, București), *Stambuleanu Adrian* (Șc. Polit. Timișoara), *Stoenescu Gheorghe* (lic. Mil. Tg.-Mureș), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Mil. Tg.-Mureș), *Șușelescu Ion* (lic. M-rea D alu), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu Al. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu Florin* (lic. Mil. Tg.-Mureș), *Terfeleag Olga* (Caransebeș), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Vișioianu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vlădeanu Tiberiu* (lic. M-rea Dealu) și *Vlăduțu Sabin* (lic. M-rea Dealu).

In ultimul timp s'au mai primit soluțiuni dela d-nii: *Bercovici Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Iliescu St. Petre* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru Haret București), *Iojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Miculescu Gh. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Marineanu Toma* (lic. M-rea Dealu), *Rabinovici S.* (Timișoara), *Rădulescu P. Manu* (lic. Giurgiu), *Septilici Raul* (Șc. de Artilerie), *Stamatiu Mihail*, *Taraș Vasile* (Brașov), *Teodorescu St. I.* și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

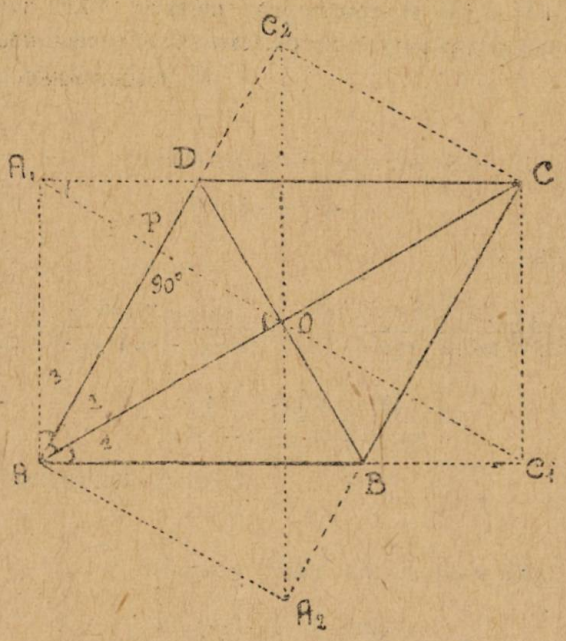
S'au primit în ultimul timp soluțiuni dela d-nii: *Constantin Ionescu Bujor* (lic. Cantemir, București), *Nedelcu Gh. Ilie* (lic. Ciurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Silion Gh. Ion* ((lic. Brașov), *Stănciulescu A. George* (Pitești), *Teodorescu Gh.* (lic. Brașov), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie) și *Vasiliu Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara).

288. — *Fie* AC *diagonala cea mai lungă a rombului* ABCD *și* A_1, A_2, C_1, C_2 *proecțiile lui* A *și* C *pe laturile opuse.*

1. *Să se demonstreze că dreptele* A_1C_1, A_2C_2, AC *și* BD *sunt concurente.*

2. *Să se determine mărimea unghiului* A *a rombului, astfel ca dreptele* A_1C_1 *și* A_2C_2 *să fie perpendiculare pe* AB *și* AD.

AUG. COMAN



1. Proectând vârfurile A și C respectiv pe laturile DC și AB, obținem patrulaterul AA_1CC_1, care având laturile opuse paralele și unghiurile drepte, este un dreptunghiu. Pentru același motiv și patrulaterul AA_2CC_2 este un dreptunghiu. Observăm acum că ambele dreptunghiuri au o diagonală comună AC, urmează că diagonalele A_1C_1 și A_2C_2 trec prin mijlocul O al diagonalei AC, fiindcă știm că: *într'un dreptunghiu diagonalele se taie în părți egale.* De altă parte știm că și: *într'un romb diagonalele se taie în părți egale,* deci diagonala BD trece și ea prin mijlocul O al diagonalei AC. Urmează astfel că dreptele: A_1C_2, A_2C_2. AC și BD sunt concurente.

2. Presupunem acum că A_1C_1 e perpendiculară pe AD. In vârful A observăm trei unghiuri:

$$\widehat{C_1AC} = \hat{1},\quad \widehat{CAD} = \hat{2} \text{ și } \widehat{DAA_1} = \hat{3}$$

a căror sumă este de 90°, ele formând $\sphericalangle C_1AA_1$ a dreptunghiului AA_1CC_1. Unghiul $\hat{1} = \hat{2}$, fiindcă triunghiul BAD este isoscel și mediana AO este și bisectoare. Apoi: $\hat{3} = \widehat{C_1A_1C}$ fiind ascuțite și având laturile respectiv perpendiculare, $AA_1 \perp A_1C$ și $AD \perp A_1C_1$; dar, $\widehat{C_1A_1C} = \hat{1}$ fiind opuse laturei CC_1 în triunghiurile dreptunghice egale C_1AC și C_1A_1C, urmează:

$$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$$

Cum am arătat că suma acestor unghiuri este 90°, fiecare este de 30° și atunci:

$$\sphericalangle A = \hat{1} + \hat{2} = 60°.$$

Soluții bune date de d-nii: *Alexandrescu Nicolae* (Ploești), *Andrieșescu Gh.* (Dorohoi), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Bârglăzan N. Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Berdan C.* (Bârlad), *Botez St. Mihail, Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Cantacuzino I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută G.* (Timișoara), *Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Comănescu Al.* (Olt), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dumitru M. Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Dragomir Ch. Eug.* (lic. Tg.-Mureș), *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Pitești), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Golcea Cornel* (Student, Cluj), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grofșorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Haimovici I. Mendel* (lic. Național, Iași), *Herscovici Emanoil* (lic. Galați), *Iliescu Dan Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu St. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu T. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iscovici I.* (Pitești), *Katz Pincu* (Galați). *Lupan Em.* (Seminarul Pedagogic, Iași), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milculescu Gh. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Niculescu C. Grigore* (lic. Mil. M-rea Dealu), *Onițiu Florian* (Șc. Polit. Timișoara), *Pantazi G. D-tru* (lic. Brăila), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Niculescu Isaia* (Mizil), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popper Ervin* (lic. Diaconovici Loga, Timișoara), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai Viteazul, București), *Porumbaru I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu). *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Silion Gh. Ion* (Brașov), *Simionescu A. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei Basarab, București), *Stamatescu I. Val.* (Seminarul Pedagogic, București), *Stefulescu I.* (lic. Diaconovici Loga, Timișoara), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai Viteazul, București), *Teoăorescu M. D-tru* (lic. Mihai Viteazul, București), *Teodorescu St. S.* (București), *Toma Nicolae* (lic. mil. Tg. Mureș), *Ursu Victor* (Șc. Polit. Timișoara), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vătășan G. Ovid* (Brașov), *Vlădianu M. Tiberiu* (lic. M-rea Dealu), *Vlăduțu Sabin* (lic. M-rea Dealu) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

Observări: 1. D-l *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), observă că pentru prima parte a problemei nu e necesar a se specifica că AC e diagonala lungă. D-sa observă încă că în a 2-a parte a problemei se putea înlocui condiția: *ca* A_1C_1 *și* A_2C_2 *să fie perpendiculare pe* AD *și* AB, *prin acea ca: ele să fie paralele,* am fi găsit $\sphericalangle A$ egal tot cu 60°.

2. D-l *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), arată că dacă s'ar fi cerut: *Să se determine*

unghiul A *al rombului astfelca dreptele* A_1C *și* A_2C_2 *să fie perpendiculare* s'ar fi găsit: $\sphericalangle A = 45^0$.

3. Observăm că afirmarea din enunțul problemei că și A_2C_2 e perpendiculară pe AB poate fi lăsată la o parte.

4. D-l *Davidsohn Mișu* (Seminarul Pedagogic, București), a demonstrat numai prima parte a problemei.

PROBLEME PROPUSE

327. — Doi călători au la dispoziție o singură bicicletă pentru a străbate o distanță dată. Amândoi pornesc deodată, unul pe bicicletă, celălalt pe jos. După câtva timp, primul părăsește bicicleta și-și continuă drumul pe jos iar cel d'al doilea întrebuințează bicicleta din momentul când o ajunge. Cum trebue să-și împartă distanța pentruca timpul scurs până când ambii se vor găsi în punctul final să fie cel mai scurt posibil?

V. VALCOVICI

328. — Să se găsească un număr de patru cifre, astfel ca numărul format de primele două cifre și numărul format de ultimele două cifre să fie numere prime; iar răsturnatul său să formeze un număr, astfel ca numărul format de primele două cifre cât și numărul format de ultimele două cifre să fie numere consecutive.

GH. DIACONU

329. — Să se găsească un număr astfel ca suma cifrelor sale să fie media aritmetică a rădăcinei patrate și cubice a răsturnatului său.

GH. VASILIU (TIMISOARA)

330. — Dacă a este un număr prim mai mare decât 3, să se arate că expresia:

$$E = a^{2n+6} - a^{2n} - a^6 + 1$$

e divizibilă cu 72.

SILION ION

331. — Să se descompună numărul 1025 într'o sumă de patru patrate perfecte. Să se generalizeze.

M. GHERMANESCU

332. — Să se arate că dacă avem:

$$x + y + z = 0,$$

avem și:

$$\frac{(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)}{zx(z+2y)(x+2z)} + \frac{(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{xy(x+2z)(y+2x)} + \frac{(z^2 - x^2)(x^2 - y^2)}{yz(y+2x)(z+2y)} = 3.$$

IOAN C. GEORGESCU

333. — Să se afle limita expresiei:

$$u = \frac{y^2 \sin(x-a) + x^2 \sin(y-b)}{y \operatorname{tg}(x-a) + x \operatorname{tg}(y-b)}$$

pentru $x = a$, $y = b$, soluțiuni a ecuației:

$$e^{x-a} + e^{y-b} + x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - 2 = 0.$$

V. ALACI

334. — Se dau patru cercuri O_1, O_2, O_3, O_4; să se construiască un al cincilea cerc O_5 astfel ca axele radicale ale cercului O_5 cu fiecare din primele patru, să formeze un trapez isoscel.

ION PROTOPOPESCU

335. — O dreaptă Δ se rotește în spațiu în jurul unui punct fix P. Se cere locul geometric al piciorului perpendicularei scoborîte dintr'un punct fix M pe dreapta Δ.

CAPITAN GR. ZAPAN

336. — Se consideră în spațiu două drepte: una fixă și cealaltă mobilă în jurul unui punct al său. Se cere locul geometric pe dreapta mobilă, al piciorului perpendicularei comune între cele două drepte.

LT.-COL. FILIP IACOB
(din Cavalerie)

INFORMATIUNI

† Cu multă părere de rău anunţăm moartea distinsului nostru corespondent *Georgescu Er. Florian,* elev al liceului *„Cantemir-Vodă“* din Bucureşti.

Deplângem alături de nemângâiata familie, moartea prea timpurie a iubitului lor fiu, care se relevase printr'o bogată activitate matematică şi a cărui moarte prea timpurie este ireparabilă.

Ferdinand I-iu, prin graţia lui Dumnezeu şi voinţa Naţională, Rege al României, la toţi de faţă şi viitori, sănătate:

Asupra raportului Ministrului Nostru Secretar de Stat la Departamentul Lucrărilor Publice No. 1977,

In baza art. 25 alin. *a* din Decretul-Lege No. 2521/920, relativ la înfiinţarea şi organizarea Şcoalelor Politechnice din România;

Am decretat şi decretăm:

Art. 1. Sunt numiţi profesori, cu titlul provizoriu, la Şcoala Politechnică din Timişoara, pe ziua de 1 Ianuarie 1924, la catedrele arătate în dreptul fiecăruia şi anume domnii:

Inginer Dion Mardan, la catedra de foraje;

Inginer Ioan Cristescu, la catedra de termodinamică şi Fizică industrială;

Inginer Marin Bănărescu, la catedra de maşini termice;

Inginer Constantin Stăncescu, la catedra de măsuri electrice;

Inginer, Pompiliu Nicolau, la catedra de hidraulică;

Inginer Dumitru Leonida, la catedra de electrotechnică;

Inginer Andrei Lupan, la catedra de cazane şi încălzit;

Inginer Cornel Severineanu, la catedra de organe de maşini.

Art. 2. Ministrul Nostru secretar de Stat la Departamentul Lucărilor Publice este însărcinat cu aducerea la îndeplinire a acestui Decret.

Dat în Bucureşti la 1 Februarie 1924.

Urmează semnătura Majestăţii Sale Regelui.

Ministerul Lucrărilor Publice

General. (ss) *Tr. Moşoiu.*

No. 365.

La următoarele probleme, s'au primit în ultimul timp soluţiuni dela d-nii:

270. *Boju Roseţel* (lic. Timişoara), *Ciorănescu I. C-tin* (Târgovişte), şi *Dem. Remdecth* (lic. Tg.-Mureş).

286. — *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Beju O. Traian* (lic Arad). *Braiester Otto* (lic. Iaşi), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *David Gh.* (lic. Timişoara), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Gataianţu* (lic. Caracal), *Golopenţia Antoniu* (lic. Timişoara), *Lindenberg F. L.* (Bucureşti), *Mateescu G. Vasile* (lic, Giurgiu) *Miu M. Ion* (lic. Caracal) şi *Ranchbach Artur.* (Gura Humorului, Bucovina),

288. — *Beju Traian* (lic. Arad), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Gulian Emil* (lic. Giurgiu), *Manaţu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marin Paul* (student, Cluj), *Nan Victor* şi *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Piteşti).

Observare. D-l *Marin Paul* a dat şi o soluţie analitică.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL IV. 15 APRILIE 1924 NO. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. O CLASA DE EXPRESIUNI NEDETERMINATE
2. NOTE MATEMATICE, 3, 4. 5
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 249, 281, 292.
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA

Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei.

ANUL IV. — No. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

O CLASA DE EXPRESIUNI NEDETERMINATE

de V ALACI

(urmare)

5. Vom considera acum un caz ceva mai general. *Ne propunem a afla adevărata valoare a expresiunei:*

$$(8) \qquad u = \frac{f(x,\ y,\ z)}{\varphi(x,\ y,\ z)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$, *pentru* $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$, *soluții a sistemului de ecuații:*

$$(9) \qquad \begin{cases} A(x,\ y,\ z) = 0 \\ B(x,\ y,\ z) = 0, \end{cases}$$

funcțiunile din enunț fiind presupuse continue și admițând derivate parțiale de primul ordin, finite, pentru $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$.

Dacă am putea rezolvi ușor sistemul (9) în raport cu două variabile oarecare, în funcție de a treia și am înlocui valorile în (8), u ar depinde de o singură variabilă și pentru o valoare particulară a ei, ar lua forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Acest caz se știe însă studia. Dacă acest lucru nu-i posibil, sau nu voim să facam această rezolvire, atunci în virtutea relațiunilor (9), putem privi pe $f(x,\ y,\ z)$, $\varphi(x,\ y,\ z)$ ca funcțiuni compuse de x de exemplu, x intrând direct și prin intermediarul lui y și z. In acest caz teorema lui *Hôpital* ne dă:

1) A se vedea No. 1, an. IV „R. M. T."

$$(10) \qquad u = \lim_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1} \frac{f(x,\ y,\ z)}{\varphi(x,\ y,\ z)} =$$

$$\lim_{x=x_1,\ y=y_1,\ z=z_1} \frac{f'_x(x,y,z) + y' f'_y(x,y,z) + z' f'_z(x,y,z)}{\varphi'_x(x,y,z) + y' \varphi'_y(x,y,z) + z' \varphi'_z(x,y,z)}$$

unde y' și z' se calculează din relațiunile (9).

In adevăr derivând relațiile (9) în raport cu x, avem:

$$\begin{cases} A'_x(x,\ y,\ z) + y' A'_y(x,\ y,\ z) + z' A'_z(x,\ y,\ z) = 0 \\ B'_x(x,\ y,\ z) + y' B'_y(x,\ y,\ z) + z' B'_z(x,\ y,\ z) = 0 \end{cases}$$

$$(*) \qquad y' = -\frac{\begin{vmatrix} A'_x & A'_z \\ B'_x & B'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A'_y & A'_z \\ B'_y & B'_z \end{vmatrix}}, \qquad z' = -\frac{\begin{vmatrix} A'_y & A'_x \\ B'_y & B'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A'_y & A'_z \\ B'_y & B'_z \end{vmatrix}}$$

unde presupunem:

$$\begin{vmatrix} A'_y & A'_z \\ B'_y & B'_z \end{vmatrix} \neq 0,$$

pentru $x = x_1,\ y = y_1$.

Inlocuind valorile găsite pentru y' și z', în expresiunea (10), obținem:

$$u = \frac{f'_x \begin{vmatrix} A'_y & A'_z \\ B'_y & B'_z \end{vmatrix} - f'_y \begin{vmatrix} A'_x & A'_z \\ B'_x & B'_z \end{vmatrix} + f'_z \begin{vmatrix} A'_x & A'_y \\ B'_x & B'_y \end{vmatrix}}{\varphi'_x \begin{vmatrix} A'_y & A'_z \\ B'_y & B'_z \end{vmatrix} - \varphi'_y \begin{vmatrix} A'_x & B'_z \\ B'_x & B'_z \end{vmatrix} + \varphi'_z \begin{vmatrix} A'_x & A'_y \\ B'_x & B'_y \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}}$$

unde vom înlocui pe x, y, z respectiv prin x_1, y_1, z_1. Vom obține astfel adevărata valoare a lui u.

Putem deci enunța următoarea regulă: *Adevărata valoare a unei expresiuni.*

$$u = \frac{f(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$, *pentru* $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ *soluții a sistemului:*

$$\begin{cases} A(x, y, z) = 0 \\ B(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

este câtul între determinanții funcționali al funcțiunilor $f(x, y, z)$, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ *și* $\varphi(x, y, z)$, $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, *adică:*

$$(11) \qquad u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix}}$$

pentru $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, *când această valoare este determinată.*

Când și această expresiune ia forma $\frac{0}{0}$, aplicăm din nou regula enunțată, condițiile din enunț presupuse împlinite.

Observări. 1). Regula enunțată, putem arăta ca și în cazul precedent, că se menține când toate valorile x_1, y_1, z_1, sau numai unele din ele sunt infinite. 2) Regula se menține și când u ia forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$, celelalte condiții menținându-se, și se demonstrează prin același procedeu ca în cazul precedent. 3) Putem ajunge la aceiași regulă, folosind formula lui *Taylor*, cum am procedat mai sus. Putem găsi chiar o regula mai generală, corespunzătoare celei rezumate în formula (7).

Aplicație. Să se afle limita expresiunei:

$$u = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - a^3 - b^3 - c^3}{\sin y z (x - a) + \sin z x (y - b) + \sin x y (z - c)}$$

pentru $x = a$, $y = b$, $z = c$, *soluții a sistemului de ecuații:*

$$\begin{cases} e^{x-a} + e^{y-b} + e^{z-c} - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0. \end{cases}$$

Pentru $x = a$, $y = b$, $z = c$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem deci folosi formula (11).

Observăm însă, că:

$$f'_x(x, y, z) = 3x^2, \quad f'_y(x, y, z) = 3y^2, \quad f'_z(x, y, z) = 3z^2$$

$$\varphi'_x(x, y, z) = yz \cos yz(x - a) + z(y - b) \cos zx(y - b) + y(z - c) \cos xy(z - c),$$

$$\varphi'_y(z, y, z) = z(x - a) \cos yz(x - a) + zx \cos zx(y - b) + x(z - c) \cos xy(z - c),$$

$$\varphi'_z(x, y, z) = y(x - a) \cos yz(x - a) + x(y - b) \cos zx(y - b) + xy \cos xy(z - c)$$

$$A'_x(x, y, z) = e^{x-a}, \quad A'_y(x, y, z) = e^{y-b}, \quad A'_z(x, y, z) = e^{z-c}$$

$$B'_x(x, y, z) = 2x, \quad B'_y(x, y, z) = 2y, \quad B'_z(z, y, z) = 2z$$

Pentru $x = a$, $x = b$, $z = c$, deducem:

$$f'_x(a, b, c) = 3a^2, \quad f'_y(a, b, c) = 3b^2, \quad f'_z(a, b, c) = 3c^2$$

$$\varphi'_x(a, b, c) = bc, \quad \varphi'_y(a, b, c) = ca, \quad \varphi'_z(a, b, c) = ab$$

$$A'_x(a, b, c) = 1, \quad A'_y(a, b, c) = 1, \quad A'_z(a, b, c) = 1$$

$$B'_x(a, b, c) = 2a, \quad B'_y(a, b, c) = 2b, \quad B'_z(a, b, c) = 2c$$

Formula (11) ne dă:

$$u=\frac{\begin{vmatrix} 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}}=\frac{3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}}=3$$

care este adevărata valoare a lui u.

6. In fine vom trata acum cazul general.

Ne propunem a afla adevărata valoare a expresiunii;

$$(12)\qquad u=\frac{f(x, x_1, x_2 \ldots x_n)}{\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$, *pentru* $x=a$, $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots x_n=a_n$ *soluţiii a sistemului de n ecuaţii:*

$$(13)\qquad \begin{cases} A(x, x_1, x_2, \ldots x_n)=0 \\ B(x, x_1, x_2, \ldots x_n)=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L(x, x_1, x_3, \ldots x_n)=0 \end{cases}$$

funcţiunile din enunţ fiind presupuse continue şi admiţând derivate parţiale de primul ordin, finite, pentru $x=a$, $x_1=a_1$, $\ldots x_n=a_n$.

Dacă am putea rezolvi uşor sistemul (13) în raport cu n variabile oarecare în funcţie de a $n+1$ variabilă rămasă, şi am înlocui valorile găsite în (12), u ar deveni o expresiune de o singură variabilă, care ia forma $\frac{0}{0}$, pentru o valoare particulară a ei, şi acest caz se ştie studia.

Dacă acest lucru nu-i posibil, sau nu voim să facem această rezolvire, atunci în virtutea relaţiunilor (13), putem privi pe $f(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ ca funcţiuni compuse de o singură variabilă x de exemplu, x intrând direct şi prin intermediul lui $x_1, x_2, \ldots x_n$.

In acest caz, teorema lui *Hôpital*, ne dă:

$$(14)\qquad u=\lim_{x=a,\, x_1=a_1, \ldots x_n=a_n}\frac{f(x, x_1, \ldots x_n)}{\varphi(x, x_1, \ldots x_n)}$$

$$=\lim_{x=a,\, x_1=a_1, \ldots x_n=a_n}\frac{f'_x+x'_1 f'_{x_1}+x'_2 f'_{x_2}+\ldots+x'_n f'_{x_n}}{\varphi'_x+x'_1\varphi'_{x_1}+x'_2\varphi'_{x_2}+\ldots+\varphi'_n\varphi'_{x_n}}$$

unde $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ se calculează din relaţiunile (13). In adevăr, derivând relaţiile (13) în raport cu x, avem:

$$\begin{cases} A'_x+x'_1 A'_{x_1}+x'_2 A'_{x_2}+\cdots+x'_i A'_{x_i}\cdots+x'_n A'_{x_n}=0 \\ B'_x+x'_1 B'_{x_1}+x'_2 B'_{x_2}+\cdots+x'_i B'_{x_i}\cdots+x'_n B'_{x_n}=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L'_x+x'_1 L'_{x_1}+x'_2 L'_{x_2}+\cdots+x'_i L'_{x_i}\cdots+x'_n L'_{x_n}=0 \end{cases}$$

$$**\qquad x'_i=-\frac{\begin{vmatrix} A'_{x_1} & A'_{x_2}\ldots A'_x\ldots A'_{x_n} \\ B'_{x_1} & B'_{x_2}\ldots B'_x\ldots B'_{x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L'_{x_1} & L'_{x_2}\ldots L'_x\ldots L'_{x_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A'_{x_1} & A'_{x_1}\ldots A'_{x_i}\ldots A'_{x_n} \\ B'_{x_1} & B'_{x_2}\ldots B'_{x_i}\ldots B'_{x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L'_{x_1} & L'_{x_1}\ldots L'_{x_2}\ldots L'_{x_n} \end{vmatrix}},$$

$i=1, 2, \ldots n$, şi unde presupunem:

$$\begin{vmatrix} A'_{x_1} & A'_{x_2}\ldots A'_{x_i}\ldots A'_{x_n} \\ B'_{x_1} & B'_{x_2}\ldots B'_{x_i}\ldots B'_{x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L'_{x_1} & L'_{x_2}\ldots L'_{x_i}\ldots L'_{x_n} \end{vmatrix}\neq 0,$$

pentru $x=a$, $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots x_n=a_n$.

Inlocuind valorile găsite pentru x_i, unde facem $i=1, 2, \ldots n$ în expresiunea (14), găsim:

$$u=\frac{\begin{vmatrix} A'x_1 & A'x_2 \dots A'x_n \dots A'x_n \\ B'x_1 & B'x_2 \dots B'x_i \dots B'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x_1 & L'x_2 \dots L'x_i \dots L'x_n \end{vmatrix} f'x - \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} A'x_1 & A'x_2 \dots A'x \dots A'x_n \\ B'x_1 & B'x_2 \dots B'x \dots A'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x_1 & L'x_2 \dots L'x \dots L\,x_n \end{vmatrix} f'x_i}{\begin{vmatrix} A'x_1 & A'x_2 \dots A'x_i \dots A'x_n \\ B'x_1 & B'x_2 \dots B'x_i \dots B_{,}x_n \\ \dots & \dots \\ L'x_1 & L'x_2 \dots L'x_i \dots L'x_n \end{vmatrix} \varphi'x - \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} A'x_1 & A'x_2 \dots A'x \dots A'x_n \\ B'x_1 & B'x_2 \dots B'x \dots B'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x_1 & L'x_2 \dots L'x \dots L'x_n \end{vmatrix} \varphi'x_i} = \frac{\begin{vmatrix} f'x & f'x_1 & f'x_2 \dots f'x_n \\ A'x & A'x_1 & A'x_2 \dots A'x_n \\ B'x & B'x_1 & B'x_2 \dots B'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x & L'x_1 & L'x_2 \dots L'x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'x & \varphi'x_1 & \varphi'x_2 \dots \varphi'x_n \\ A'x & A'x_1 & A'x_2 \dots A'x_n \\ B'x & B'x_1 & B'x_2 \dots B'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x & L'x_1 & L'x_2 \dots L'x_n \end{vmatrix}}$$

unde vom înlocui pe $x, x_1, x_2, \dots x_n$ respectiv prin $a, a_1, a_2, \dots a_n$. Vom obține astfel adevărata valoare a lui u.

Putem deci enunța următoarea regulă: *Adevărata valoare a unei cxpresiuni:*

$$u=\frac{f(x, x_1, x_2, \dots x_n)}{\varphi(x, x_1, x_2, \dots x_n)}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$, *pentru* $x=a, x_1=a_1, x_2=a_2, \dots x_n=a_n$, *soluții a sistemului de n ecuații:*

$$\begin{cases} A(x, x_1, x_2, \dots x_n)=0 \\ B(x, x_1, x_2, \dots x_n)=0 \\ \dots \\ \dots \\ L(x, x_1, x_2, \dots x_n)=0, \end{cases}$$

este câtul între determinanții funcționali al funcțiunilor $f(x, x_1, \dots x_n)$, $A(x, x_1, \dots x_n)$ $B(x, x_1, \dots x_n)$ $\dots L\,x, x_1, \dots x_n)$ *și* $\varphi(x, x_1, \dots x_n)$, $A(x, x_1, \dots x_n)$, $B(x, x_1, \dots x_n), \dots L(x, x_1, \dots x_n)$, *adică:*

$$(15)\qquad u=\frac{\begin{vmatrix} f'x & f'x_1 & f'x_2 \dots f'x_n \\ A'x & A'x_1 & A'x_2 \dots A'x_n \\ B'x & B'x_1 & B'x_2 \dots B'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x & L'x_1 & L'x_2 \dots L'x_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'x & \varphi'x_1 & \varphi'x_2 \dots \varphi'x_n \\ A'x & A'x_1 & A'x_2 \dots A'x_n \\ B'x & B'x_1 & B'x_2 \dots B'x_n \\ \dots & \dots \\ L'x & L'x_1 & L'x_2 \dots L'x_n \end{vmatrix}}$$

pentru $x=a, x_1=a_1, x_2=a_2, \dots x_n=a_n$, *când această valoare este determinată.*

Când și această expresiune ia forma $\frac{0}{0}$, aplicăm din nou regula enunțată, condițiile din enunț presupuse împlinite.

Observări: 1) Regula enunțată se menține și în cazul când toate valorile $a, a_1, a_2, \dots a_n$ sau numai unele ar fi infinite, procedându-se ca în paragraful 2.

2) Regula găsită se menţine şi când u, ia forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$, celelalte condiţii menţinându-se, şi se demonstrează prin acelaşi procedeu ca în paragraful 3. 3) Vom observa încă că putem ajunge la aceiaşi regulă, folosind formula lui *Taylor*, cum am procedat în paragraful 4, şi se poate ajunge chiar la o formulă mai generală corespunzătoare celei rezumate în formula (7).

Aplicaţie. Să se afle limita expresiunii:

$$u=\frac{\sin 3(x-a)+\sum_{i=1}^{n}\sin 3(x_i-a_i)}{e^{5(x-a)}+\sum_{i=1}^{n}e^{5(x_i-a_i)}-n-1},\quad i=1,2,\ldots n,$$

pentru $x=a$, $x_i=a_i$, *soluţii a sistemului de* n *ecuaţii:*

$$\begin{cases} x^2-a^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-a_i^2)=0 \\ x^3-a^3+\sum_{i=1}^{n}(x_i^3+a_i^3)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n-a^n+\sum_{i=1}^{n}(x_i^n-a_i^n)=0 \\ \operatorname{tg}(x-a)+\sum_{i=1}^{n}i\operatorname{tg}(x_i-a_i)=0 \end{cases}$$

Pentru $x=a$, $x_i=a_i$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, putem folosi deci, formula (15).

Observăm însă că:

$$f'_x(x,\ x_1,\ldots x_n)=3\cos 3(x-a),$$
$$\varphi'_x(x,\ x_1,\ldots x_n)=5\,e^{5(x-a)},$$
$$A'_x(x,\ x_1,\ldots x_x)=2x,$$
$$B'_x(x,\ x_1,\ldots x_n)=3x^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$K'_x(x,\ x_1,\ldots x_n)=n\,x^{n-1},$$
$$L'_x(x,\ x_1,\ldots x_n)=\frac{1}{\cos^2(x-a)}$$

$$f'x_i(x,\ x_1,\ldots x_n)=3\cos 3(x_i-a_i),$$
$$\varphi'x_i(x,\ x_1,\ldots x_n)=5\,e^{5(x_i-a_i)},$$
$$A'x_i(x,\ x_1,\ldots x_n)=2x_i$$
$$B'x_i(x,\ x_1,\ldots z_n)=3x_i^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$K'x_i(x,\ x_1,\ldots x_n)=n\,x_i^{n-i},$$
$$L'x_i(x,\ x_1,\ldots x_n)=\frac{i}{\cos^2(x_i-a_i)}$$

unde vom face, $i=1,\ 2,\ldots n$.

Pentru $x=a$, $x_i=a_i$, deducem:

$$f'x(a,\ a_1,\ldots a_n)=3,\qquad f'x_i(a,\ a_1,\ldots a_n)=3,$$
$$\gamma'x(a,\ a_1,\ldots a_n)=5,\qquad \varphi'x_i(a,\ a_1,\ldots a_n)=5,$$
$$A'x(a,\ a_1,\ldots a_n)=2a,\qquad A'x_i(a,\ a_1,\ldots a_n)=2a_i,$$
$$B'x(a,\ a_1,\ldots a_n)=3a^2,\qquad B'x_i(a,\ a_1,\ldots a_n)=3a_i^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$K'x(a,\ a_1,\ldots a_n)=na^{n-1},\quad K'x_i(a,\ a_1,\ldots a_n)=na_i^{n-1}$$
$$L'x(a,\ a_1,\ldots a_n)=1,\qquad L'x_i(a,\ a_1,\ldots a_n)=i.$$

Formula (15), ne dă:

$$u=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3\ldots\ldots 3\ldots\ldots 3 \\ 2a & 2a_1\ldots\ldots 2a_i\ldots\ldots 2a_n \\ 3a^2 & 3a_1^2\ldots\ldots 3a_i^2\ldots\ldots 3a_n^2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ na^{n-1} & na_1^{n-1}\ldots na_i^{n-1}\ldots na_n^{n-1} \\ 1 & 1\ldots\ldots i\ldots\ldots n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 5\ldots\ldots 5\ldots\ldots 5 \\ 2a & 2a_1\ldots\ldots 2a_i\ldots\ldots 2a_n \\ 3a^2 & 3a_1^2\ldots\ldots 3a_i^2\ldots\ldots 3a_n^2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ na^{n-1} & na_1^{n-1}\ldots na_i^{n-1}\ldots na_n^{n-1} \\ 1 & 1\ldots\ldots i\ldots\ldots n \end{vmatrix}}=\frac{3}{5}$$

care este adevărata valoare a lui u.

Observare generală. Putem cuprinde în clasa expresiunilor nedeterminate, și acele expresiuni $u(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$, care iau una din formele nedeterminate: $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, pentru $x = a$, $x_1 = a_1 \ldots x_n = a_n$, soluții a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} A(x, x_1, \ldots x_n) = 0 \\ B(x, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ L(x, x_1, \ldots x_n) = 0, \end{cases}$$

funcțiunile din enunț fiind presupuse continue și admițând derivate parțiale de primul ordin, finite, pentru $x = a$, $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$.

Vom folosi în acest scop, aceleași procedee cunoscute în cazul unei singure variabile, care permit a aduce expresiunea dată, la forma: $\frac{0}{0}$, sau $\frac{\infty}{\infty}$, și în urmă aplicăm regulele stabilite mai sus.

Aceste considerații, permit astfel a lărgi câmpul de aplicații a expresiilor nedeterminate.

Vom trata un singur exemplu.

Să se afle limita expresiunii:

$$u = \left[\text{tg.}\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)\right]^{\frac{1}{xy(z-a-b)}}$$

pentru $x = a$, $y = b$, $z = a + b$, *soluții a sistemului de ecuații*

$$\begin{cases} \sin(x-a) + 2\sin(y-b) + 3\sin(z-a-b) = 0 \\ x + y^2 - z + b(1-b) = 0 \end{cases}$$

Pentru $x = a$, $y = b$, $z = a + b$, expresiunea dată, ia forma nedeterminată, 1^∞.

Luând logaritmii neperiani ai expresiunii date găsim:

$$\log. u = \frac{\log. \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)}{xy(z-a-b)}$$

Pentru $x = a$, $y = b$, $z = a + b$, această ultimă expresiune ia forma nedeterminată, $\frac{0}{0}$, putem deci folosi, formula (11).

Observăm întâi, că:

$$f'_x(x, y, z) = -\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)}$$

$$f'_y(x, y, z) = -\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)}$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x - y + z\right)}$$

$$\varphi'_x(x, y, z) = y(z - a - b), \quad \varphi'_y(x, y, z) = x(z - a - b),$$
$$\varphi'_z(x, y, z) = xy$$

$$A'_x(x, y, z) = \cos(x - a), \quad A'_y(x, y, z) = 2\cos(y - b),$$
$$A'_z(x, y, z) = 3\cos(z - a - b),$$

$$B'_x(x, y, z) = 1, \quad B'_y(x, y, z) = 2y, \quad B'_z(x, y, z) = -1.$$

Pentru $x = a$, $y = b$, $z = a + b$, deducem:

$$f'_x(a, b, a + b) = -2, \quad f'_y(a, b, a + b) = -2,$$
$$f'_z(a, b, a + b) = 2,$$

$$\varphi'_x(a, b, a + b) = 0, \quad \varphi'_y(a, b, a + b) = 0,$$
$$\varphi'_z(a, b, a + b) = ab$$

$$A'_x(a, b, a + b) = 1, \quad A'_y(a, b, a + b) = 2,$$
$$A'_z(a, b, a + b) = 3$$

$$B'_x(a, b, a + b) = 1, \quad B'_y(a, b, a + b) = 2b,$$
$$B'_z(a, b, a + b) = -1,$$

Formula (11) ne dă:

$$\log. u = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2b & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & ab \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2b & -1 \end{vmatrix}} = \frac{4(2b-1)}{ab(b-1)}$$

$$\ast\ast\ast \quad u = e^{\frac{4(2b-1)}{ab(b-1)}},$$

care este adevărata valoare a lui u.

NOTE MATEMATICE

3. *Asupra problemei 288.* Partea I a acestei probleme, rezolvată la pagina 12, este adevărată și în cazul când figura A B C D este un paralelogram oarecare, iar AA_1, CC_1 și AA_2, CC_2 sunt două perechi de drepte paralele.

Utilizând figura dela pagina 13 se observă că AA_1CC_1 fiind un paralelogram, diagonala A_1C_1 trece prin mijlocul diagonalei AC. De asemeni diagonala A_2C_2 a paralelogramului AA_2 CC_2 trece prin mijlocul lui AC, pe unde trece evident și DB.

LOCOT. COL. GH BUICLIU

4. Imi propun să dau o generalizare exercițiului 39 din C. P. A., cap. VII de d-l *Ioachimescu.*

Exercițiul este propus astfel.

Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\frac{\sqrt[n]{x}}{c}$$

Exercițiul putem să-l extindem mai general în modul următor:

$$\frac{\sqrt[n]{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x}}{a_2a_3\ldots a_nx}+\frac{\sqrt[n]{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x}}{a_1a_3\ldots a_nx}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\sqrt[n]{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x}}{a_1a_2a_3\ldots x}+\frac{\sqrt[n]{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x}}{a_1a_2a_3\ldots a_n}=\frac{\sqrt[n]{x}}{c}$$

și aducând la acelaș numitor membrul întâi al ecuației, avem:

$$\frac{a_1(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x)^{\frac{1}{n}}+a_2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x)^{\frac{1}{n}}}{a_1a_2a_3\ldots a_nx}\ldots+$$

$$\ldots+\frac{a_n(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x)^{\frac{1}{n}}+x(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x)^{\frac{1}{n}}}{a_1a_2a_3\ldots a_nx}=\frac{x^{\frac{1}{n}}}{c}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad(a_1+a_2+a_3+\ldots+x)^{\frac{1}{n}}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x)=\frac{a_1a_2a_3\ldots a_nx\ldots x^{\frac{1}{n}}}{c}$$

avem:

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+x)^{\frac{1}{n}+1}=\frac{a_1a_2a_3\ldots a_nx^{\frac{1}{n}+1}}{c}$$

sau putem scrie

$$\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i\,x^{\frac{n+1}{n}}}{c}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad\left(\frac{x+\sum_{i=1}^{n}a_i}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}}=\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{c}$$

și extrgând rădăcina de ordinul $\frac{n+1}{n}$ avem:

$$\frac{x+\sum_{i=1}^{n}a_i}{x}=\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

scoatem pe x

$$x+\sum_{i=1}^{n}a_i=x\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad\sum_{i=1}^{n}a_i=x\left[\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad x=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$$

SAMOILA DUMITRU

5. Asupra Notei No. 67, din G. M., XXVIII, No. 9, pag. 335.

In această notă, d-l *A. Th. Nicolau*, află suma interesantei serii:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} \qquad (a>0)$$

Chestiunea se poate generaliza. Fie seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+r)(\alpha+2r)\ldots(\alpha+nr)}{(\beta+r)(\beta+2r)\ldots(\beta+nr)} \qquad (\alpha>0,\ \beta>0,\ r>0)$$

Pentru a găsi condiţia de convergenţă a acestei serii, să aplicăm criteriul Raabe-Duhamel, criteriu de care s'a folosit şi d-l Nicolau în sus menţionata notă. Punând:

$$(1) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha+(n+1)r}{\beta+(n+1)r} = \frac{1}{1+a}$$

$$n\alpha = \frac{n(\beta-\alpha)}{\beta+(n+1)r}$$

Sau trecând la limită:

$$\lim_{n=\infty} n\alpha = \frac{\beta-\alpha}{r}$$

şi cum această limită în cazul seriilor convergente trebue să fie mai mare ca unitatea, rezultă condiţia:

$$\beta-\alpha>r.$$

Să trecem la însumare. Voi întrebuinţa metodul dat de d-l *Nicolau*. Din (1) se deduce cu uşurinţă:

$$(\beta-\alpha-r)u_{n+1}=[\alpha+(n+1)r]u_n-[\alpha+(n+2)r]u_{n+1}$$

De unde, obţinem şirul de egalităţi:

$$(\beta-\alpha-r)u_1=(\beta-\alpha-r)u_1$$

$$(\beta-\alpha-r)u_2=(\alpha+2r)u_1-(\alpha+3r)u_2$$

$$(\beta-\alpha-r)u_3=(\alpha+3r)u_2-(\alpha+4r)u_3$$

$$(\beta-\alpha-r)u_4=(\alpha+4r)u_3-(\alpha+5r)u_4$$

. . . . . .

Adunând membru cu membru aceste egalităţi şi reducând, căpătăm:

$$(\beta-\alpha-r)\sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

$$=(\beta-\alpha-r)u_1+(\alpha+2r)u_1=(\beta+r)u_1$$

şi cum: $u_1=\dfrac{\alpha+r}{\beta+r}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \frac{\alpha+r}{\beta-\alpha-r}$$

In cazul particular $\alpha=0$, $r=1$, $\beta=a$, găsim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \frac{1}{a-1}$$

adică tocmai suma seriei d-lui *Nicolau*.

STOENESCU AL. ION
Student

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen partial de Geometrie analitica

19 Martie 1924

Seria I

Se dă o elipsă cu centrul în O şi cu focarele F şi F'. Fie F A şi F' A' două paralele duse prin F şi F'. Dreptele F A, F' A' se întâlnesc într'un punct P, iar tangentele în A şi A' la elipsă se întâlnesc în M. Se cere;

1. Locul geometric a lui M când A şi A' se mişcă pe elipsă.
2. Locul geometric a lui P.
3. Să se demonstreze că mediana P N a triunghiului O P M este constantă.

Seria II

Se dă o dreaptă Δ şi un punct F. Se cere:

1. Ecuaţia generală a conicelor care au pe F ca focar şi care sunt tangente dreptei Δ într'un punct dat.
2. Locul geometric al centrelor şi al vârfurilor acestor conice.

Seria III

Focarele unei elipse date sunt extremităţile unui diametru a unei hiperbole echilatere. Se cere să se demonstreze.

1. Tangentele duse la elipsă în punctele unde ea se taie cu hiperbola sunt paralele cu asimptolele hiperbolei.

2. Tangentele duse din un punct de pe hiperbolă la elipsă sunt paralele cu doi diametri conjugaţi ai hiperbolei.

Seria IV

Se dă un punct M pe un cerc de diametru A B şi se cere:

1. Ecuaţia generală a parabolelor care trec prin A, B şi sunt tangente în M la cerc.

2. Să se arate că pentru o poziţie dată a lui M corespund 2 parabole P_1, P_2.

3. Locul intersecţiei axelor acestor parabole.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXIX No. 7, Martie 1924. Elemente a calcului *practic*, de *I. Ionescu*. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare pe intervalul 1 Septembrie 1922 — 1 August 1923, de *Locot.-Col. Gh. Buicliu*, Inginer *N. Georgescu*, Inginer-şef *C. D. Orăşanu*.

Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „Inginer *H. Capriel*" pe intervalul 1922—23, de *Gh. Em. Filipescu*, *Ernest Abasohn*.

2. *Foaia Matematică*, apare la *Chişinău* sub conducerea unui comitet compus din ingineri şi profesori. Are drept scop, familiarizarea elevilor de liceu cu chestiuni de matematici elementare. Apare la 1 al fiecărei luni. *Anul I, No. 1, Ianuarie 1924.* Cuvânt înainte, de comitet. Centru de greutate la un patrulater, de *N. Profiri.* Câteva observaţiuni asupra mişcărei unei figuri plane în planul ei, de *N. Profiri. No. 2, Februarie 1924.* Fracţii zecimale periodice simple, de *N. Profiri. No. 3, Martie 1924.* Asupra unor ecuaţii reciproce, de *N. Profiri.* Asupra unor triunghiuri Asupra unor triunghiuri ortologice în spaţiu, de *B. M. Barbălat.*

Urăm tinerii „*Foi Matematice*" bogată activitate în ogorul matematic al „Tării Noastre" şi îi dorim realizarea deplină a nobilului şi înălţătorului scop ce şi-a făurit.

Abonamentul pe un an . . . . . Lei 80
Pentru elevi . . . . . Lei 40

Abonamen ele se trimet pe adresa: Inginer *Nicolae R. Ştefan*, Str. *Puşchin No. 30, Chişinău.*

3. *Jurnal Matematic*, vol. I, No. 5, 1 Martie 1924. Chestiuni de ortopol şi omologie, de *Micu Grünbaum.* Asupra triunghiurilor speciale, de *Tib. Popovici.*

4. *Jurnal Matematic*, vol. I, No. 6, 15 Martie 1924. Câteva puncte, drepte şi conice remarcabile într'un triunghiu, de *Tib. Popovici.*

5. *Anuarul societăţii „Matematica Bârlădeană"* pe anul 1922—1923. Cuprinde procesele-verbale ale şedinţelor societăţii, începând cu No. 12 până la No. 34. Aceste şedinţe au început la 15 Octombrie 1922 şi s'au terminat la 10 Mai 1923, fiind conduse cu competenţă de d-l profesor *N. Marteniuc*, care a ştiut să formeze o sănătoasă atmosferă matematică. Cuprinde încă, probleme propuse, Note, Conferinţe, Soluţii şi Indicaţii.

PROBLEME REZOLVATE

249. — *Un vagon cu trei osii depărtate între ele cu câte 4 m., în mersul său pe o linie ferată obicinuită, are grupuri de câte trei ciocăniturі la intervale egale de timp, aşa încât ciocăniturile formează un şir continuu echidistant. Să se afle lungimea şinei.*

V. VALCOVICI

Ciocăniturile se produc la încheerea şinelor. Când prima ciocănitură se aude, roţile primei osii trec pe o nouă şină; când prima osie a ajuns la 4 metri se aude a doua ciocănitură, produsă de roţile osiei a doua; când prima osie a ajuns la 8 metri, se aude a treia ciocănitură a roţilor ultimei osii a vagonului. Aceste ciocănituri se aud la intervale egale fiindcă distanţa dintre osii este aceiaşi şi mişcarea e presupusă uniformă.

Roţile primei osii trebue să mai parcurgă *încă 4 metri*, pentru ca prima cioçănitură din grupa a doua de ciocănituri să aibă loc şi pentru ca ciocăniturile să formeze un şir continuu echidistant. Urmează că lungimea unei şine este de 12 metri.

Soluţiune dată de d-nii: *Andrieşescu Gh. Gh.* (Dorohoi), *Brodschii I.* (lic. Cetatea Albă), *Cantacuzino Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitriu Mihai* (lic. M-rea Dealu). *Gârleşteanu Mihail* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Gheorghiu Olga* (Bucureşti), *Iliescu Dan Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Lindemberg Lyonell* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Milculescu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau C-tin* (Piteşti), *Niculescu C. Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Popovici Th. Ioaa, Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solomon Nicu* (Şc. Polit. Timişoara), *Şuşelescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Ursu Victor* (Şc Polit. Timişoara), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Zoican A. A.* (lic. T.-Severin.

249. — S'au primit în ultimul timp soluţii dela d-nii: *Leontescn C-tin* şi *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, Bucureşti).

281. — *Doi călători merg pe acelaș drum. Unul pleacă dintr'o localitate* A *spre alta* B, *iar celalt din* B *spre* A *și se întâlnesc într'o localitate* C. *In momentul întâlnirii primul făcuse 20 km. mai mult ca al doilea. Păstrând aceiași viteză sosesc primul în localitatea* B *după* $\frac{14}{3}$ *ore dela întâlnire, iar al doilea în* A *după* $\frac{54}{7}$ *ore dela întâlnire.*

Să se afle distanța dintre cele două localități.

ALEX. ZAMFIRESCU-PITESTI

Insemnăm: $x =$ numărul de km. al distanței B C, atunci: $AC = x + 20$ km.

Mișcarea fiind presupusă uniformă, viteza știm că este egală cu spațiu împărțit cu timpul corespunzător. Călătorul A parcurgând distanța x în $\frac{14}{3}$ ore, viteza în km. pe oră este: $\frac{x}{\frac{14}{3}} = \frac{3x}{14}$, iar călătorul B parcurgând distanța $x+20$ în $\frac{54}{7}$ ore, viteza în km. pe oră este:

$$\frac{x+20}{\frac{54}{7}} = \frac{7(x+20)}{54}$$

Călătorii A și B se înțelege că pornesc în același timp, A cu viteza $\frac{3x}{14}$, B cu viteza $\frac{7(x+20)}{54}$ și ajung în același timp în C.

Timpul în mișcarea uniformă este cum știm egal cu spațiu împărțit cu viteza, avem astfel dreptul a scri:

$$(1) \qquad \frac{x+20}{\frac{3x}{14}} = \frac{x}{\frac{7(x+20)}{54}},$$

adică timpul întrebuințat de A pentru a ajunge în C, este egal cu acel întrebuințat de B spre a ajunge tot în C.

Ecuația (1), o putem scri încă:

$$\frac{7(x+20)^2}{54} = \frac{3x^2}{14}$$

$$\frac{*}{**} \quad \left(\frac{x+20}{x}\right)^2 = \frac{81}{49}$$

Extrăgând rădăcina patrată, vom lua numai semnul plus în membrul al 2-lea, raportul distanțelor fiind pozitiv, avem:

$$\frac{x+20}{x} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{*}{**} \quad x = 70.$$

Rezultă:

$$AB = AC + CB = x + 20 + x = 160,$$

care este distanța căutată.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Aposteanu Vasile* (lic Diaconovici Loga, Timișoara), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan N. Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Bercovici Emil* (Student), *Bercovici Sigmund* (lic. Pitești), *Bocancea I. Kirilă* (lic. Tg.-Mureș), *Braiester Otto* (lic. Național, Iași), *Cantacuzino I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Comănescu Al.* (Olt), *Constantinescu N. Nicolae* (Seminarul Pedagogic, București), *Diaconu Gheorghe, Dumitrescu Alex.* (Seminarul Pedagogic. București), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Galescu Teodor* (student, Iași), *Herscovici Emanoil* (lic. Galați), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Katz Pincu* (Galați), *Kertesc Paul* (lic. Arad), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mironovici Virginia* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Pantazi G. Dumitru* (lic. Brăila), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popescu M. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popescu C. Victor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Purdilă Constantin* (lic. Brașov), *Radu Ilie* (lic. Diaconovici Loga, Timișoara), *Rădulescu Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Ropcean Ioan* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Stamatescu I. Valeriu* (Seminarul, Pedagogic, București), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Zoican A. Aurel* (Șc. Polit. Timișoara).

Observări: D-nii: *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), au observat că în „Culegere de Probleme". pag. 249, este o problemă analoagă.

2. D-nii: *Radu Ilie* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara) și *Vasilescu Mircea* (Giurgiu), au observat, că problema tratată, este analoagă cu problema 872, din „Exercices d'Algèbre, par „F. G. M", pag. 213, cu unele schimbări de date.

3. D-nii: *Negretzu Florea* (lic. Pitești) și *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), au observat că enunțul nu este destul de clar, în sensul că: nu se spune dacă cei doi călători pornesc simultan din A și B, așa cum am interpretat noi și cum de altfel se simția că este intenția propunătorului, de aceia au fost conduși a trata și *cazul când cei doi călători au aceiași viteză, dar nu pleacă în același timp, și au găsit soluția* $AB = 81,250$ *km.*

4, Au tratat numai acest caz din urmă subliniat, d-nii: *Agapescu N. Nicolai* (lic. Național, Iaşt), *Cocorandu M.*

(Şc. Polit. Timişoara), *I. N. Georgescu-Val, Constantinescu Ioan* (lic. Chişinău), *David Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara) *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Gheorghiu Gh. Olimpia, Gradin I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Hotăran Teodor* (student), *Ionescu Nicu* (lic. Piteşti), *Katz S.* (lic. Botoşani), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Popovici Chr. I.* (Galaţi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici Puiu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Raubach Artur* (Gura Humorului, Bucovina), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Silion Gh.* (lic. Braşov), *Stamatiu Mihail* (Piteşti) şi *Wagner I.* (Alexandria).

Iată soluţia în acest caz: Am găsit în primul caz, că vitezele celor doi călători sunt respectiv:

$$\frac{3x}{14} = \text{şi } \frac{7(x+20)}{54}$$

scriind că sunt egale găsim:

$$\frac{3x}{14} = \frac{7(x+20)}{54} \text{ sau } \frac{3x}{7} = \frac{7(x+20)}{27}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad 81x = 49x + 980, \text{ de unde:}$$

$$x = 30,\ 625 \text{ km.}$$

Atunci: $AB = 2 \times 30,625 + 20 = 81,250$ km., distanţa cerută.

S'au primit în ultimul timp soluţii dela d-nii: *Calmanovici Savu* (liceul Cantemir, Bucureşti), *Damşescu Aurel* (Şc. de Conductori, Cluj), *Golopenţia Antoniu* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Iliescu Şt. Dimo* (lic. Tg. Mureş), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu) şi *Simionescu D. Gh.* (M-rea Dealu).

292. — *Să se determine cantităţile constante a şi k astfel ca relaţiunile:*

$$\sin(2a - x) = \sin x + k \sin(a - x)$$

$$\sin(4a - x) = \sin x + \sin(2a - x),$$

să se transforme în identităţi.

TR. LALESCU

Soluţiune dată de d-nii: *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Flickstein J.* (Cernăuţi), *Nicolau Constantin* (lic. R.-Sărat), *Oniţiu Florin* (Şc. Polit. Timişoara), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vulpe Tiberiu* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara].

Identităţile date se pot scri:

$$\sin(2a - x) - \sin x = k \sin(a - x)$$

$$\sin(4a - x) - \sin x = \sin(2a - x)$$

Transformând diferenţele de sinusuri în produse, avem:

$$2 \sin(a - x) \cos a = k \sin(a - x)$$

$$2 \sin(2a - x) \cos 2a = \sin(2a - x)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad (2 \cos a - k) \sin(a - x) = 0$$

$$(2 \cos 2a - 1) \sin(2a - x) = 0.$$

Pentruca aceste egalităţi să devie identităţi, adică să aibă loc pentru orice valoare a lui x, trebuie ca a şi k să satisfacă simultan ecuaţiile:

$$\begin{cases} 2 \cos a - k = 0 \\ 2 \cos 2a - 1 = 0. \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie deducem:

$$\cos 2a = \frac{1}{2}$$

de unde:

$$2a = 2k_1\pi \pm 60^0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad a = k_1\pi \pm 30^0$$

k_1 fiind un întreg oarecare. Inlocuind această valoare în prima ecuaţie a sistemului, deducem:

$$k = 2 \cos(k_1\pi \pm 30^0) = \pm\sqrt{3}$$

Valorile cerute pentru a şi k sunt astfel:

$$a = k_1\pi \pm 30^0$$

$$k = \pm\sqrt{3}$$

Alte soluţii date de de d-nii: *Angelescu Dinu* (Bucureşti), *Negretzu Florea* (lic. Piteşti) şi *Teodorescu St. I.*

S'au primit în ultimul timp soluţii dela d-nii: *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Berardo Bernardis* (lic. R.-Sărat), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Udrisky Traian* (lic. Arad).

PROBLEME PROPUSE

337.—Să se afle toate numerile care împărțite prin 41 să dea restul 5 și împărțite prin 19 să dea restul 6.

GRIGORE I. POPESCU

338.—Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre astfel ca prima cifră să fie egală cu suma ultimilor două, a doua cifră să fie egală cu cifra întâia mărită cu a patra, iar prima cifră să fie și divizor al numărului format de suma cifrelor patratului.

SABIN VLADUTU

339. — Să se determine coeficenții a, b, c ai ecuației:

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

știind că suma și produsul lor sunt egale respectiv cu suma și produsul rădăcinelor ecuației. Să se resolve apoi ecuația.

CAPITAN I. LINTES

340.—Să se verifice identitatea:

$$\frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b} = \sqrt{b^2-2ac-\sqrt{(b^2-2ac)^2-4a^2c^2}}$$

V. ALACI

341. — Să se calculeze laturile patrulaterului ABCD, cunoscând: $\overline{OA}=m$, $\overline{OB}=n$, $\overline{OC}=n$, $\overline{OD}=n-m$ și $\widehat{OBC}=60^0$, O fiind punctul de intersecție al diagonalelor.

STANCIULESCU DAN

342.—Fie a, b, c; α, β, γ respectiv picioarele medianelor și înălțimelor triunghiului ABC.

Să se găsească perimetrul exagonului stelat $a\beta c\ \alpha b\gamma$, perimetrul triunghiului ABC fiind cunoscut.

ION PROTOPOPESCU

343.—Fie I și O centrele cercului înscris și circumscris unui triunghiu ABC. Din picioarele bisectoarelor triunghiului ABC se duc tangente la cercul I, al căror puncte de tangență sunt A′, B′, C′. Să se demonstreze că dreptele AA′, BB′, CC′ se întâlnesc într'un punct pe IO.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

344. — Se dau n cercuri în plan. Să se găsească locul punctelor M de unde putem duce tangente la aceste cercuri, astfel ca suma patratelor ariilor patrulaterelor care au ca vârfuri punctul M, punctele de contact și centrele cercurilor date să fie constantă.

Să se cerceteze dacă locul poate să fie imaginar sau redus la un punct.

Să se determine punctul M astfel ca suma patratelor ariilor patrulaterelor să fie maximă sau minimă.

DILI C. SCHILERU

345. — Două bare rigide egale AB și CD se așează vertical, articulând capetele lor A și C pe solul presupus orizontal. Capătul B al barei AB se leagă printr'un fir flexibil și inextensibil de un punct E al barei CD. Asupra punctului B lucrează o forță orizontală dată F în planul barelor, iar asupra capătului D lucrează o forță orizontală X necunoscută, în același plan.

Să se determine:

1. Sensul în care trebue să lucreze F pentruca sistemul să fie în echilibru

2. Valoarea forței X, a tensiunei T a firului, precum și ale reacțiunilor solului în cazul echilibrului.

V. VALCOVICI

INFORMATIUNI

S'a pus sub tipar: Exerciții și Probleme de Algebră Elementară, culese de d-nul prof. I. Dimitriu-Arad. O recomandăm cu stăruință corespondenților și tuturor acelor doritori de a câștiga abilitatea calculului algebric. Data apariției se va anunța la timp.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul IV-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL IV. 15 MAI 1924 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. DILI C. SCHILERU. DOUA PROBLEME DE ANALITICA.
2. NOTE MATEMATICE, 6, 7.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 222. 237, 246, 251, 252, 330, 332.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că începând cu anul acesta fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice din Timișoara, și d-nii:

Burghele C., inginer la Soc. Energia, asistent la Școala Politechnică, Timișoara.
Onicescu O., doctor în matematici, profesor universitar, Str. Clopotarii vechi, 25, București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL I . — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAI 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

DOUA PROBLEME DE ANALITICA

de DILI C. SCHILERU
student Şc. Pol. Timişoara

In cele ce urmează îmi propun să rezolv două probleme şi anume:

1) Locul polurilor unei drepte în raport cu o conică C, când dreapta înfăşură o conică C_1.

2. Locul punctelor de unde tangentele la o conică formează un unghiu dat.

La rezolvarea acestor probleme mă voi servi de ecuaţia tangenţială a conicilor care după cum se ştie că pentru o conică:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$$

este:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ D & C & E & v \\ D & E & F & w \\ U & V & W & 0 \end{vmatrix} =$$

$$au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+zw^2=0 \quad (I)$$

unde am însemnat:

$$a=CF-E^2;\ b=DE-BF;\ c=AF-D^2;$$

$$d=BE-CD;\ e=BD-AE;\ z=AC-B^2.$$

1) Fie:

$$C=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0;$$

$$C_1=A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1xz+2E_1yz+F_1z^2=0.$$

$P(\alpha, \beta, \gamma)$, ecuaţiile conicelor C, C_1 şi coordonatele unui punct P al locului. Ecuaţia polarei punctului P faţă de conica C este: $xC'_\alpha+yC'_\beta+zC'_\gamma=0$, ca ea să fie tangentă conicei C_1 vom avea conform (I)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 & C'_\alpha \\ B_1 & C_1 & E_1 & C'_\beta \\ D_1 & E_1 & F_1 & C'_\gamma \\ C'_\alpha & C'_\beta & C'_\gamma & 0 \end{vmatrix} =0$$

Acesta e locul căutat, se vede uşor că e de gradul al II-lea în (α, β, γ) căci, C'_α, C'_γ, C'_γ sunt de gradul I în (α, β, γ) deci locul e o conică.

Genul conicei loc se determină în modul următor:

Presupunem că conica C e o conică cu centru:

Când centrul conicei C este exterior conicei C_1 rezultă că prin acest centru vor trece două tangente ale conicei C_1, ele vor avea polurile la infinit, deci conica loc are două puncte la infinit, este deci o *hiperbolă.*

Când centrul conicei C este pe conica C_1 rezultă că prin el va trece o tangentă a conicei C_1 iar polul ei va fi la infinit, deci conica loc are un singur punct la infinit deci va fi o *parabolă.*

Când centrul conicei C va fi în interiorul conicei C_1 rezultă că prin el nu va trece tangente reale ale conicei C_1. adică nu vom avea puncte reale la infinit, deci locul în acest caz este o *elipsă.*

Acum dacă presupunem că conica C este o parabolă atunci va exista două tangente paralele cu axa ei, la conica C_1 deci în acest caz vom avea două puncte la infinit deci conica loc e o *hiperbolă.*

2) Fie:

$$a u^2 + 2 b u v + c v^2 + 2 d u w + 2 e v w + f w^2 = 0$$

ecuația tangențială a conicei:

$$F(x, y) = A x^2 + 2B x y + C y^2 + 2D x + 2E y + F = 0$$

și $P(\alpha, \beta)$ un punct al locului, ecuația unei drepte care trece prin acest punct este: $y - \beta = m(x - \alpha)$ sau $m x - y + \beta - m\alpha = 0$. Ca această dreaptă să fie tangentă conicei $F(x, y) = 0$ e necesar și suficient ca cătimile $m, -1, \beta - m\alpha$ să verifice ecuația tangențială a conicei, adică:

$$a m^2 - 2 b m + c + 2 d m (\beta - m\alpha) - 2 e (\beta - m\alpha) + f (\beta - m\alpha)^2 = 0$$

sau ordonând după puterile lui m avem:

$$(f\alpha^2 - 2 d\alpha + a) m^2 - 2 (f\alpha\beta - e\alpha - d\beta + b) m + f\beta^2 - 2 e\beta + c = 0 \qquad (II)$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt coeficienții unghiulari ai tangentelor din punctul $P(\alpha, \beta)$ la conica $F(x, y) = 0$, or între coeficienții unghiulari trebue să existe relația: $\operatorname{tg} V = \dfrac{m - m'}{1 + m m'^2} = K$ când unghiul tangentelor e constant, $(m, m'$ fiind rădăcina ecuației II) sau: $\dfrac{(m + m')^2 - 4 m m'}{(1 + m m)^2} = K^2 \qquad (III).$

Dar din II avem:

$$m + m' = 2 \frac{f\alpha\beta - e\alpha - d\beta + b}{f\alpha^2 - 2 d\alpha + a}; \quad m m' = \frac{f\beta^2 - 2e\beta + a}{f\alpha^2 - 2 d\alpha + d}$$

Inlocuind acestea în relația III ea ia forma:

$$4 \frac{\left[\dfrac{f\alpha\beta - e\alpha - d\beta + b}{f\alpha^2 - 2 d\alpha + a}\right]^2 - \dfrac{f\beta^2 - 2 e\beta + c}{f\alpha^2 - 2 d\alpha + a}}{\left[1 + \dfrac{f\beta^2 - 2 e\beta + c}{f\alpha^2 - 2 d\alpha + a}\right]^2} = K^2$$

$$= \frac{(f\alpha\beta - e\alpha - d\beta + b)^2 - (f\alpha^2 - 2 d\alpha + a)(f\beta^2 - 2e + c)}{|f(\alpha^2 + \beta^2) - 2 d\alpha - 2 e\beta + a + c|^2} \qquad (IV)$$

dar făcând calcule vedem că:

$$(f\alpha\beta - e\alpha - d\beta + b)^2 - (f\alpha^2 - 2 d\alpha + a)(f\beta^2 - 2 e\beta + e) = -\Delta F(\alpha\beta)$$

unde Δ e determinantul

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

al conicei $F(x, y) = 0$.

Atunci relația IV se poate scrie:

$$K^2 = \frac{-\Delta F(\alpha\beta)}{|f(\alpha^2 + \beta^2) - 2 d\alpha - 2 e\beta + a + c|^2} \qquad (V)$$

sau: (VI) $K^2 M^2 + \Delta F(\alpha\beta) = 0$ unde

$$M = f(\alpha^2 + \beta^2) - 2 d\alpha - 2 e\beta + a + c$$

deci locul e în general o curbă de gradul al 4-lea.

Această curbă se reduce la gradul al 2-lea când $K = \infty$ și $f = 0$ adică, dacă unghiul format de cele două tangente e drept sau când conica $F(x, y) = 0$ e o parabolă.

Când $K = \infty$ deducem că locul e

$$f(\alpha^2 + \beta^2) - 2 d\alpha - 2 e\beta + a + c = 0$$

un cerc, cercul lui *Monge* pentru conicele cu centru iar pentru parabolă adică dacă $f = 0$ e: $2 d\alpha + 2 e\beta - a - c = 0$ directoarea ei

Ecuația VI: $K^2 M^2 + \Delta F(\alpha\beta) = 0$ ne arată că oricare ar fi K curba loc trece prin intersecția cercului lui *Monge* cu conica dată, deci trece prin patru puncte imaginare conjugate două câte două căci cercul lui *Monge* nu interesectează conica în puncte reale.

Când $K = 0$ ecuația VI ne dă $F(\alpha, \beta) = 0$ adică însăși conica, când $f = 0$ ecuația V ne dă:

$$K^2 [-2 d\alpha - 2 e\beta + a + c]^2 + \Delta F(\alpha\beta) = 0$$

e o conică și anume o *hiperbolă* oricare ar fi K care are puncte comune cu directoarea $2 d\alpha + 2 e\beta - a - c = 0$ și parabola $F(\alpha, \beta) = 0$ adică două puncte imaginar conjugate.

Ecuația II ne ajută să rezolvăm orice problemă relativ la tangente când între coeficienții lor unghiulari există relația $\varphi(m m') = 0$.

Observație. Aceasta a doua problemă a fost tratată de d-l prof. Lt.-Col. *Gh. Buicliu* în *Gazeta Matematică*, No. 9, din 1922.

D-sa la rezolvarea acestei chestiuni utilizează ecuațiunea fascicolului de tangente dintr'un punct exterior conicei pune condițiunea ca unghiul fascicolului să fie constant și determină locul.

NOTE MATEMATICE

6. *Asupra triunghiului în care avem:* $2a=b+c$

S'au stabilit atât în „R. M. T." cât şi în „G. M." numeroase relaţiuni între elementele unui triunghi, ale cărui laturi satisfac condiţiei: $2a=b+c$.

Iată încă două consecinţe interesante ale acestei relaţii.

1. — *Piciorul* D *al bisectoarei relative la latura a e mijlocul segmentului determinat pe aceiaş lalură de* I — *contactul cercului înscris şi* M — *piciorul mediamei.*

2. — H *fiind piciorul înălţimii,* — I — *este mijlocul segmentului* H M.

Vom demonstra mai întâiu o relaţie simplă. Fie A B C un triunghiu oarecare; D, I, M, H punctele menţionate şi fie ω, ω_1 centrele cercurilor înscris şi exînscris unghiului A.

Punctele A, ω, D, ω_1 formează o diviziune armonică; α fiind mijlocul segmentului $\omega\omega_1$, am deci:

$$(1) \qquad \overline{\alpha\omega}^2 = \overline{\alpha A}\cdot\overline{\alpha D}\,.-$$

Pe de altă parte obţin:

$$\frac{\alpha D}{MD}=\frac{\omega D}{ID}=\frac{\alpha D+\omega D}{MD+DI}=\frac{\alpha\omega}{MI}$$

$$\frac{\alpha D}{MD}=\frac{AD}{HD}=\frac{\alpha D+DA}{MD+HD}=\frac{\alpha A}{MH}$$

de unde:

$$\frac{\alpha\omega}{MI}=\frac{\alpha D}{DM}=\frac{\alpha A}{MH}\,;\quad \frac{\overline{\alpha\omega}^2}{\overline{MI}^2}=\frac{\alpha A\cdot\alpha D}{DM\cdot MH}$$

Numărătorii fiind egali conform relaţiuuii armonice (1), rezultă:

$$(2) \qquad \overline{MI}^2=\overline{MD}\cdot\overline{MH}$$

relaţie pe care voiam s'o stabilesc. — Traducerea relaţiei (2) e următoarea: *In orice triunghiu, fascicolul format de bisectoare, înălţime şi cevianele corespunzătoare contactelor cercului înscris şi exînscris, relative la aceiaş latură — e armonic.*

Ţinând seamă de relaţia de mai sus (2) şi de relaţia:

$$(3) \qquad \overline{HM}=4\cdot\overline{MD}$$

stabilită în nota No. 3 din „G. M." anul XIX, 1913, pentru triunghiurile în care avem: $2a=b+c$, obţin:

$$\overline{MI}^2=4\cdot\overline{MD}^2 \text{ sau: } \overline{MI}=2\cdot\overline{MD}$$

egalitatea care demonstrează primul punct.

Inlocuind pe M D dat de această ultimă relaţie, în relaţia (2), am:

$$\overline{MI}=\frac{MH}{2}$$

relaţie care demonstrează punctul 2.

ALEXANDRU NICULESCU
student

7. In cele ce urmează îmi propun să rezolv următoarea chestiune, cunoscută de altfel, la care voi întrebuinţa noţiunea de produs scalar precum şi proprietatea lui de distributivitate.

Să se arate că rezultanta R a unui sistem de forţe $(F_1, F_2 \ldots F_n)$ e dată de expresiunea:

$$R^2=\Sigma F_1^2+2\Sigma F_iF_k\cos(F_iF_k).$$

In adevăr fie egalitatea victorială:

$$\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n$$

evident căci putem scrie:

$$\overline{R}\cdot\overline{R}=(\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n)(\overline{F}_1+\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n)$$

$$=\overline{F}_1\cdot\overline{F}_1+\overline{F}_2\cdot\overline{F}_2+\ldots+\overline{F}_n\overline{F}_n+2\overline{F}_1\overline{F}_2+\ldots$$

Dar $\overline{R}\cdot\overline{R}=R^2$; $\overline{F}_i\overline{F}_i=\overline{F}_2^2$ $\overline{F}_1\overline{F}_2=\overline{F}_1\overline{F}_2\cos(\overline{F}_1\overline{F}_2)$

Deci: $R^2=F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2$

$$+2F_1F_2\cos(F_1F_2)+\ldots=\Sigma F_i^2+2\Sigma F_iF_k\cos(F_iF_k)$$

Această chestiune e rezolvată pe altă cale în culegerile de probl. de Mec.: *A. G. Ioachimescu* şi *G. Ţiţeica.*

DILI C. SCHILERU
Elev Şc. Politechnică Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXIX No. 8, Aprilie 1924. Teoreme asupra triunghiului, de *Grigore C. Moisil.* Asupra dreptelor lui *Simson* tangente la cercul celor nouă puncte, de *Alexandru I. Guţu.*

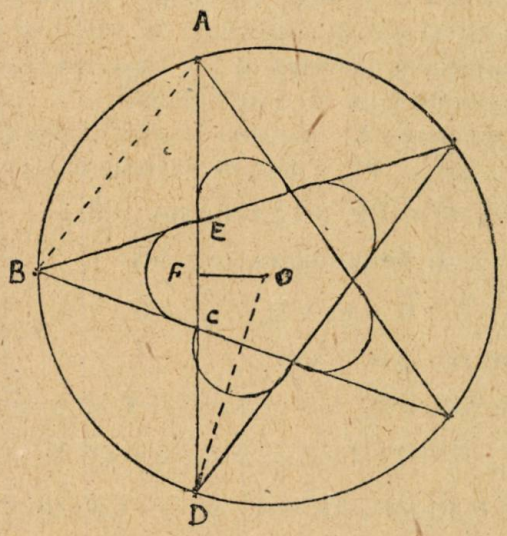
2. *Jurnal Matematic*, vol. I. No. 7, 1 Aprilie 1924. Câteva puncte, drepte şi conice remarcabile într'un triunghiu, de *Tib. Popovici.*

3. *Jurnal Matematic*, vol. I. No. 8, 15 Aprilie 1924. Note din transformarea cosogonală, de *Micu Grünbaum.*

PROBLEME REZOLVATE

222. — *Se dă un pentagon stelat înscris într'un cerc de rază* R. *Laturile acestui pentagon, se întretaie formând un pentagon convex, pe ale cărui laturi ca diametre, descrim în afară semicercuri. Să se afle numai în funcție de* R, *suprafața cuprinsă între cercul dat și acest ornament.*

PINCU KATZ



Fie AD latura pentagonului stelat, AB latura pentagonului convex, EC latura pentagonului mic obținut prin întretăerea laturilor poligonului stelat și OF apotema pentagonului mic, care este și apotema pentagonului stelat. Să exprimăm aceste elemente în funcție de raza R a cercului dat.

Laturile AD și AB sunt cunoscute în funcție de R, anume:

$$(1)\quad AD=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\quad AB=\frac{R}{2}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Apoi, în triunghiul ABC observăm că: $\hat{B}=\hat{C}=36^0$, deci AB = AC. In triunghiul DEB isoscel și el, avem: ED = BD = AB, rezultă:

$$(2)\qquad AC=ED=AB.$$

Dar: $AD=AC+CD=AC+DE+EC$,

și în virtutea relațiilor (2):

$$AD=2AB-EC$$

$$(3)\qquad EC=2AB-AD=$$

$$\frac{R}{2}\left(2\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

Din triunghiul dreptunghic ODF, deducem încă:

$$\overline{OF}^2=R^2-\frac{\overline{AD}^2}{4}=R^2-\frac{R^2}{16}(10+2\sqrt{5})$$

$$=\frac{R^2}{16}(6-2\sqrt{5})=\frac{R^2}{16}(\sqrt{5}-1)^2$$

$$(4)\qquad OF=\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$$

Să însemnăm cu S suprafața cerută, cu s, suprafața pentagonului regulat de latură EC și cu s_1 suprafața semicercului descris pe EC ca diametru. Privind figura putem scri:

$$(5)\qquad S=\pi R^2-s-5s_1$$

Rămâne să calculăm s și s_1.

In adevăr observăm că:

$$s=\frac{5\overline{EC}\times\overline{OF}}{2}$$

Inlocuind EC și OF cu valorile lor din (3) și (4), avem:

$$s=\frac{5R^2}{16}(\sqrt{5}-1)\left(2\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$$

iar:

$$s_1=\frac{1}{2}\cdot\pi\frac{\overline{EC}^2}{4}$$

$$=\frac{\pi R^2}{32}(40-8\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}-4\sqrt{100-20})$$

$$=\frac{\pi R^2}{32}(50-22\sqrt{5})=\frac{\pi R^2}{16}(25-11\sqrt{5})$$

Atunci:

$$S=\frac{R^2}{16}\left[16\pi-5(\sqrt{5}-1)\left(2\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)-5\pi(25-11\sqrt{5})\right]$$
$$=\frac{R^2}{16}\left[\pi(55\sqrt{5}-109)-5(\sqrt{5}-1)\left(2\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\right]$$

care este suprafaţa cerută.

Au încercat să soluţioneze problema dar au făcut greşeli de calcul sau raţionament, d-nii: *Bârglăzan N. Aurel* (Timişoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Bruno Stefani* (Timişoara), *Cocorandu M.* (Timişoara), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Călăraşi), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Kassargian A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. Dumitru* (Giurgiu), *Moroianu I. At.* (Constanţa), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popa P. Nicolae*, *Popescu I. Grigore* (lic. Giurgiu), *Popovici Gh. A. C.* (lic. Naţional, Iaşi), *Popovici Th. Ioan*, *Şerban I. Tib.* (lic. Braşov), *Silion Gh. Ion* (Braşov), *Stambuleanu Adrian* (Timişoara), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Tărăbuţă Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Timişoara), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

S'au primit în ultimul timp soluţii dela d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bruno Ştefani* (Şc. Polit. Timişoara)ĩ *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), şi *Tăras Vasile* (lic. Braşov), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu).

237. — *Să se calculeze derivatele funcţiunilor* $(\sin x)^{\cos x}$ *şi* $(\cos x)^{\sin x}$ *în raport cu* $\operatorname{tg} x$.

T. POPOVICI

Soluţiune dată de d-l *Rădulet B. Remus* (Şc Polit., Timişoarea).

Să notăm:

(1) $y=\operatorname{tg} x,$

(2) $u=(\sin x)^{\cos x}$

(3) $v=(\cos x)^{\sin x}$

A deriva în raport cu $\operatorname{tg} x$ însemnează că derivata lui $\operatorname{tg} x$ este 1.

Să calculăm în acest caz derivata lui x în raport cu y.

Din (1):

$$x=\operatorname{arc\,tg} y$$

$$x'=\frac{1}{1+y^2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos^2 x.$$

Vom deriva acum relaţiile (2) şi (3) în raport cu $y=\operatorname{tg} x$, observând că y intră prin intermediarul lui x, dar întâi să luăm logaritmii relaţiilor (2) şi (3), avem:

$$Lu=\cos x\, L\sin x,\qquad Lv=\sin x\, L\cos x$$

Derivând aceste relaţii în raport cu $y=\operatorname{tg} x$, avem:

$$\frac{u'}{u}=-x'\sin x\, L\sin x+x'\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$\frac{v'}{v}=x'\cos x\, L\cos x-x'\frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$u'=\cos^2 x\,(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\, L\sin x\right)$$

***

$$v'=\cos^2 x\,(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\, L\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$$

Soluţia 2-a dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Brădăţeanu C. Cornel* (Craiova), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Katz Pincu* (lic. Galaţi), *Muşta St.* (lic. Timişoara), *Popovici Th. Ioan Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Tomescu Gheorghe* (Timişoara).

Punem: $\operatorname{tg} x=t,$

atunci:

$$\sin x=\frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$$

(1)
$$\cos x=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}$$

Notând cu u şi v expresiunile date, avem:

(2) $$u=(\sin x)^{\cos x}=\left(\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)^{\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}},$$

$$v=(\cos x)^{\sin x}=\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\right)^{\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}}$$

A afla derivatele lui $(\sin x)^{\cos x}$ şi $(\cos\alpha)^{\sin x}$ în raport cu $\operatorname{tg} x$, este totuna cu a afla derivatele lui u şi v date de (2) în raport cu t.

Luăm întâi logaritmii neperiani ai relaţiilor (2), avem:

$$Lu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\,L\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}},$$

$$Lv=\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\,L\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}$$

Derivând în raport cu t, avem:

$$\frac{u'}{u}=\frac{-\dfrac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}\cdot \mathrm{L}\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{\pm\sqrt{1+t^2}}{t}\cdot\frac{\pm\sqrt{1+t^2}-\dfrac{t^2}{\pm\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

$$\frac{v'}{v}=\frac{\pm\sqrt{1+t^2}-\dfrac{t^2}{\pm\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}\mathrm{L}\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\cdot(\pm\sqrt{1+t^2})\cdot\frac{-\dfrac{t^2}{\pm\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

$$u'=u\left(-\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{L}\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)$$

* * *

$$v'=v\left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{L}\frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}}-t\cdot\frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right)$$

Revenim la variabila x folosind în sens invers relaţiunile (1) şi (2), găsim:

$$u'=\cos^2 x\,.\,(\sin x)^{\cos x}(\cot x\,.\cos x-\sin x\,\mathrm{L}\sin x)$$

$$v'=\cos^2 x\,.\,(\cos x)^{\sin x}(\cos x\,\mathrm{L}\cos x-\operatorname{tg} x\sin x)$$

Obscrvare. Unii corespondenţi au aflat derivatele lui u şi v în raport cu x şi în funcţie de $\operatorname{tg} x$, atribuind un înţeles greşit enunţului.

S'a primit în ultimul timp soluţiuni dela d-l: *Tărăbuţă I. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

246. — *Să efectueze suma:*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i-1}}{2^{2i}+2^{i+1}+2^{i-1}+1}$$

V. ALACI

1. Soluţie dată de d-nii: *Coşereanu I.* (Timişoara), *Cretoiu A.* (Bucureşti), *Epure Ştefan* (Buzău), *I. N. Georgescu-Val, Popovici Tiberiu* (Bucureşti), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu) şi *Stoenescu I.* (Bucureşti).

Termenul general al sumei se poate scrie succesiv:

$$\frac{2^{i-1}}{2^{2i}+2^{i+1}+2^{i-1}+1}=\frac{2^{i-1}}{(2^{i+1}+1)(2^{i-1}+1)}=$$

$$\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{2^{i-1}(2^2-1)}{(2^{i+1}+1)(2^{i-1}+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{i+1}-2^{i-1}}{(2^{i+1}+1)(2^{i-1}+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2^{i+1}+1)-(2^{i-1}+1)}{(2^{i+1}+1)(2^{i-1}+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{i-1}+1}-\frac{1}{2^{i+1}+1}\right)$$

Atunci;

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i-1}}{2^{2i}+2^{i+1}+2^{i-1}+1}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i-1}+1}$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{i=}^{n}\frac{1}{2^{i+1}+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{2^{i-1}+1}$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{i-1}^{n-2}\frac{1}{2^{i+1}+1}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$$

Dar:

$$\frac{1}{3}\sum_{i=}^{n}\frac{1}{2^{i-1}+1}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{2^{i+1}+1}\equiv 0,$$

astfel că:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i-1}}{2^{2i}+2^{i+1}+2^{i-1}+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$$

2. Generalizare dată de d-l *Stoenescu I.* (Bucureşti).

Dacă în identitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(i)-f(i+1)]=f(1)-f(n+1)$$

luăm: $f(x)=\dfrac{1}{m^{x-1}+1}+\dfrac{1}{m^x+1}$

avem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m^{i-1}+1}+\frac{1}{m^{i}+1}-\frac{1}{m^{i}+1}-\frac{1}{m^{i-1}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m^{n}+1}-\frac{1}{m^{n+1}+1}$$

(2) $$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\sum_{i=1}^{n}\frac{m^{i-1}}{m^{2i}+m^{i+1}+m^{i-1}+1}=$$

$$\frac{1}{m^{2}-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m^{n}+1}-\frac{1}{m^{n+1}+1}\right)$$

Dacă aci facem $m=2$, avem tocmai însumarea (1).

3. Altă generalizare dată de d-l *Stoenescu I.* (Bucureşti).

Pornim dela suma:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}}{(x_{i-1}+1)(x_{i+1}+1)}$$

unde presupunem relaţia de condiţie:

(3) $x_{i+1}-x_{i-1}=k\,x_{i-1}$, k, constant.

Suma S se poate calcula în acest caz foarte uşor, folosind relaţia:

$$\frac{x_{i-1}}{(x_{i-2}+1)(x_{i+1}+1)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x_{i-1}+1}-\frac{1}{x_{i+1}+1}\right)$$

Se găseşte astfel:

(4) $$S=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x_0+1}+\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_n+1}-\frac{1}{x_{n+1}+1}\right)$$

Pentru, $x_i=m^i$, relaţia (3) fiind împlinită, fiindcă:

$$m^{i+1}-m^{i-1}=(m^2-1)\,m^{i-1},$$

obţinem din (4):

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{m^{i-1}}{m^{2i}+m^{i+2}+m^{i-1}+1}=$$

$$\frac{1}{m^{2}-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m^{n}+1}-\frac{1}{m^{n+1}+1}\right)$$

care este tocmai însumarea (2). Pentru $m=2$, avem însumarea cerută.

4. Generalizare dată de d-nii: *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

Transformăm identitatea trigonometrică:

$$\sum_{p=1}^{n}\sec.(p+1)\,a\,\sec.(p-1)\,a$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(n+1)\,a+\operatorname{tg} n\,a-\operatorname{tg} a}{\sin 2\,a}$$

prin formulele lui *Euler*.

$$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},\quad \cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\quad i=\sqrt{-1},$$

(R. M. T.) anul II, No. 1, pag. 3) şi avem:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(e^{i(p+1)a}+e^{-i(p-1)a})(e^{i(p-1)a}+e^{-i(p-1)a})}$$

$$=\frac{2i}{e^{2ai}-e^{-2ai}}\left[\frac{e^{i(n+1)a}-e^{-i(a+1)n}}{i(e^{i(n+1)}+e^{-i(n+1)a})}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{ina}-e^{-ina}}{i(e^{ina}+e^{-ina})}-\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{i(e^{ia}-e^{-ia})}\right]$$

Punând: $e^{ia}=\sqrt{m}$, obţinem:

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{4m^{p}}{(m^{p+1}+1)(m^{p-1}+1)}=$$

$$\frac{2m}{m^{2}-1}\left(\frac{m^{n+1}-1}{m^{n+1}+1}+\frac{m^{n}-1}{m^{n}+1}-\frac{m-1}{m+1}\right)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\sum_{p=1}^{n}\frac{m^{p-1}}{(m^{p+1}+1)(m^{p-1}+1)}$$

$$=\frac{1}{2(m^{2}-1)}\left(\frac{m^{n+1}-1}{m^{n+1}+1}+\frac{m^{n}-1}{m^{n}+1}-\frac{m-1}{m+1}\right),$$

care uşor putem controla că e tot relaţia (2).

Observări. 1. Au găsit însumarea mai generală (2) folosind prima metodă şi d-nii: *Coşereanu I.* (Timişoara) şi *Cretoiu A.*

2. Dacă în (2) facem $n=\infty$, găsim:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{m^{i-1}}{m^{2i}+m^{i+1}+m^{i-1}+1}=\frac{m+1}{2(m+1)(m^{2}-1)}$$

care pertru $m=2$, dă:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i-1}}{2^{2i}+2^{i+1}+2^{i-1}+1}=\frac{5}{18}$$

3. D-l *Popovici Tiberiu* a efectuat o sumă mai generală şi a găsit:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k^{i+m}}{(A+k^{i+m})(A+k^{i+m})} =$$

$$\frac{k^m}{k^p-k^n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{A+k^{i+n}}, \quad p>n,$$

observând că:

$$\frac{k^{i+m}}{(A+k^{i+n})(A+k^{i+p})} =$$

$$\frac{k^m}{k^p-k^n}\left(\frac{1}{A+k^{i+n}}-\frac{1}{A+k^{i+p}}\right)$$

S'a primit în ultimul timp soluţiuni dela d-nii: *Constantinescu Gr. Ion* şi *David I. Ion* (Buzău).

251. — *In câte moduri putem plăti suma de 87 lei cu hârtii de 1 leu, 2 şi 5 lei?*

EMIL TEFANESCU

Soluţiune dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Braierster I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Dobre V.* (cond. de L. P.), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Goldstein M.* (lic. Bucureşti), *Ionescu Paul* (lic. M-rea Dealu), *Pamula A. Alexandru* (lic. Botoşani), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Politehnică Timişoara), *Taras Vasile* (lic. Braşov) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

Insemnând cu x, y, z respectiv numărul hârtiilor de 1 leu, 2 şi 5 lei, conform enunţului avem:

$$x+2y+5z=87$$

$$x=87-2y-5z$$

Această ecuaţie trebuie satisfăcută în numere întregi pozitive.

Pentru $z=1$, deducem:

$$x=82-2y$$

Putem lua pentru y orice număr întreg de la 1 la 40, adică: $1 \leq y \leq 40$ şi avem deci 40 de soluţii.

Pentru:

$z=2$, deducem: $x=77-2y$, deci: $1 \leq y \leq 38$

$z=3$, „ $x=72-2y$, „ $1 \leq y \leq 35$

$z=4$, „ $x=67-2y$, „ $1 \leq y \leq 33$

$z=5$, „ $x=62-2y$, „ $1 \leq y \leq 30$

$z=6$, „ $x=57-2y$, „ $1 \leq y \leq 28$

$z=7$, „ $x=52-2y$, „ $1 \leq y \leq 25$

$z=8$, „ $x=47-2y$, „ $1 \leq y \leq 23$

$z=9$, „ $x=42-2y$, „ $1 \leq y \leq 20$

$z=10$, „ $x=37-2y$, „ $1 \leq y \leq 18$

$z=11$, „ $x=32-2y$, „ $1 \leq y \leq 15$

$z=12$, „ $x=27-2y$, „ $1 \leq y \leq 13$

$z=13$, „ $x=22-2y$, „ $1 \leq y \leq 10$

$z=14$, „ $x=17-2y$, „ $1 \leq y \leq 8$

$z=15$, „ $x=12-2y$, „ $1 \leq y \leq 5$

$z=16$, „ $x=7-2y$, „ $1 \leq y \leq 3$

Numărul total al soluţiilor este:

$$(40+38)+(35+33)+(30+28)+(25+23)$$
$$+(20+18)+(15+13)+(10+8)+(5+3)$$
$$=78+68+58+48+38+28+18+8$$
$$=\frac{78+8}{2}\cdot 8=43\times 8=344 \text{ soluţie.}$$

Observare. Au dat încă soluţii d-nii: *Bobărnac M.* (181 soluţii), *Cantacuzino I. Ioan* (348), *Flickstein I.* (180), *Katz Pincu* (784), *Mehlmann Teodor* (336), *Mironovici Virginia* (180), *Sclion Gh. Ion* (288) şi *Tărăbuţă C. Paul* (414).

A găsit toate cele 344 soluţii şi d-l: *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti).

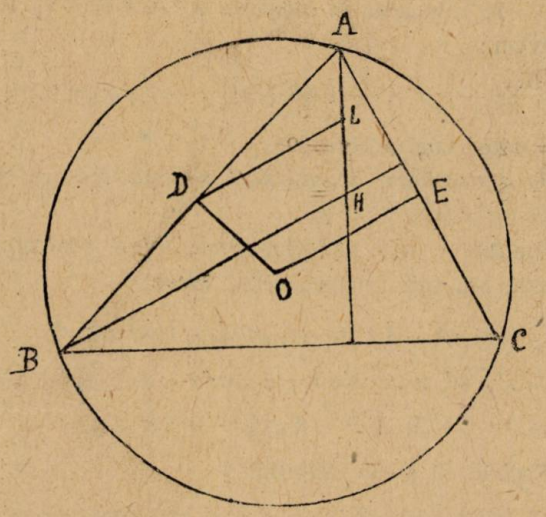
252. — *Să se construiască un triunghiu* A B C, *cunoscând centrul* O *al cercului înscris, mijlocul uneia din laturi şi mijlocul lui* A H, H *fiind ortocentrul trtunghiului.*

UDRISKY TRAIAN

Soluţie dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Bejan O. Traian* (lic. Arad), *Blumenfeld David* (lic. Botoşani), *Bolgiu Ovidiu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Constantinescu N. Nicolae* (Seminarul Ped. Bucureşti), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Moroianu At.* (lic. Constanţa), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani) şi *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

Vom considera două cazuri după cum este cunoscut mijlocul unei laturi ce pleacă din A sau mijlocul unei laturi opuse.

Cazul I. Presupunem problema rezolvată. Fie A B C triunghiul cerut, L mijlocul lui A H, D mijlocul lui A B și O centrul cercului A B C.



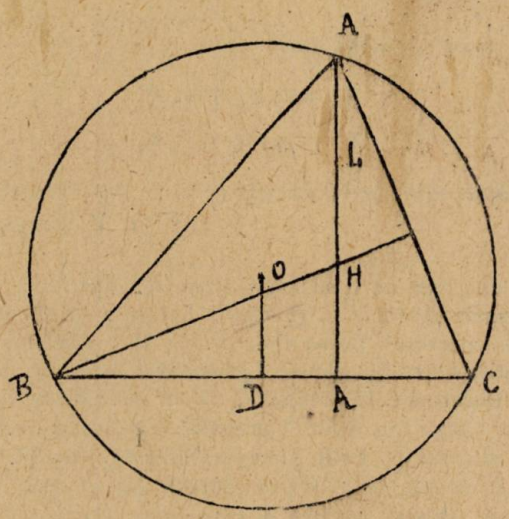
In acest caz (fig. 1), observăm că D L ∥ B H și $DL = \frac{BH}{2}$ unind mijloacele laturilor A B și A H. De altă parte mediatoarea O E ∥ B H și egală tot cu $\frac{BH}{2}$ (Exercices de Géométrie par F G M, ediția 5; pag. 305). Urmează că OE = DL. Rezultă de aici următoarea construcție.

Punctele D_1 L, O fiind cunoscute, ducem din O o paralelă cu D L și luăm O E = D L. Prin D și E ducem respectiv pe O D și O E perpendiculare care se vor întâlni în A. Din O ca centru cu O A ca rază intersectăm dreptele A D și A E respectiv în B și C și avem triunghiul cerut A B C.

Observare. Dacă punctele date D, L, O sunt în linie dreaptă, triunghiul cerut nu există. Dacă perpendiculara pe O D se confundă cu D L, triunghiul cerut este dreptunghiu în A.

Cazul al II-lea. Fie cunoscute și aci punctele D, L, O, numai că D este mijlocul laturei opuse lui A,

In acest caz unim O cu D (fig. 2), ducem prin D o perpendiculară la O D și pe paralela L A′ la O D, luăm L A = O D, avem astfel vârful A. (Exercices



de Géometrie par F. G. M, pag. 305). Apoi din O ca centru cu O A ca rază intersectăm perpendiculara dusă în D pe O D în B și C și avem triunghiul cerut A B C.

Observare. Dacă punctele date L, O, D sunt în linie dreaptă, obținem un triunghiu isoscel. Dacă D este în O, avem un triunghiu dreptunghic.

Au soluționat problema numai în cazul al II-lea, d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Arcadian N.* (lic. Caracal), *Bălean G.* (lic. Timișoara), *Bărglăzan A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Davidsohn Mișu* (Seminarul Pedagogic, București), *Epure I. Ștefan* (Buzău), *Gabrielescu Vasile* (lic, Brăila), *Gheorghiu C.* (Comănești), *Iliescu D. Emilian* (Vâlcea), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Mușta Șt.* (lic. Timișoara), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popovici Th. Ioan, Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Răuț Const.* (lic. M-rea Dealu), *Șerban Tib.* (Brașov), *Spârchez Zeno* (lic. Brașov), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu) și *Vătășan G. Ovid.* (Șc. Polit., Timișoara).

Al 2-lea caz a fost soluționat și de d-l: *Boju Rosetel* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), d-l *Damșescu Aurel* (șc. de conductori technici, Cluj), a soluționat primul caz. D-l *Brüll Leon* a soluționat bine ambele cazuri.

274. — *Se dau ecuațiile:*

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt x_1, x_2 *și* x'_1, x'_2.

Să se formeze ecuația;

$$X^2 + PX + Q = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1 = x_1 x'_1 + x_2 x'_2$$
$$X_2 = x_1 x'_2 + x_2 x'_1$$

Când rădăcinele ecuației în X sunt reale?

D V. IONESCU

Soluție dată de d-nii: *Bârglăzan N. Aurel* Șc. Polit. Timișoara), *Berdan C.* (Bârlad), *Bercovici A. Emil* (Șc. Polit. București). *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Botez St. Mihail, Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Șc. Polit. Timișoara), *Comănescu Al.* (Olt), *Danciu Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Epure Ștefan* (Buzău), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gradiny I. Gheorghe* (Câmpina), *I. N. Georgescu-Val* (Giurgiu), *Ionescu Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Katz Pincu* (Galați), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Panaitescu I. Al.* (lic. Pitești), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Petrulian Nicu* (Ploești), *Popescu I. Grigore* (lic. Giurgiu), *Propst Jean* (Șc. Polit. Timișoara), *Răduleț B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Șerban I. Tiberiu* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Singer Bella* (lic. (Pompilian, București), *Smigelschi Octavian, Stambuleanu Adrian* (Șc. Polit. Timișoara), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stănescu D.* (Șc. Polit. Timișoara), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București). *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tomescu N. Gheorghe* (Timișoara). *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

Folosind relațiile între rădăcini și coeficienții unei ecuații de gradul al 2-lea, putem scri privind ecuațiile date și ținând seama de enunț:

$$(1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x'_1 + x'_2 = -p' \\ x'_1 x'_2 = q' \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} X_1 + X_2 = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_1 x'_2 + x_2 x'_1 = -P \\ X_1 X_2 = (x_1 x'_1 + x_2 x'_2)(x_1 x'_2 + x_2 x'_1) = Q \end{cases}$$

Din relațiile (3) deducem, ținând seamă de (1) și (2):

$$-P = x_1 (x'_1 + x'_2) + x_2 (x'_1 + x'_2)$$
$$= (x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2) = p\,p'.$$

$$Q = x_1^2 x'_1 x'_2 + x_1 x_2 x'^2_1 + x_1 x_2 x'^2_2 + x_2^2 x'_1 x'_2$$
$$= x_1 x_2 (x'^2_1 + x'^2_2) + x'_1 x'_2 (x_1^2 + x_2^2)$$
$$= x_1 x_2 [(x'_1 + x'_2)^2 - 2 x'_1 x'_2] + x'_1 x'_2 [(x_1 + x_2)^2 - 2 x_1 x_2] = q (p'^2 - 2 q') + q' (p^2 - 2 q)$$
$$= p^2 q' + p'^2 q - 4 q q'.$$

Valorile lui P și Q aflate în funcție de p, q, p', q' le înlocuim în ecuație $X^2 + P X + Q = 0$, și avem:

$$(4)\quad X^2 - p\,p' X + p^2 q' + p'^2 q - 4 q q' = 0,$$

care este ecuația cerută.

Să aăspundem acum când această ecuație are rădăcini reale?

Ecuația (4) are rădăcini reale când realizantul ei este nul sau pozitiv, adică când:

$$p^2 p'^2 - 4 p^2 q' - 4 p'^2 q + 16 q q' \geqq 0$$
$$p^2 (p'^2 - 4 q') - 4 q (p'^2 - 4 q') \geqq 0,$$

sau:
$$(5)\quad (p^2 - 4 q)(p'^2 - 4 q') \geqq 0.$$

Trebue să avem simultan:

$$\begin{cases} p^2 - 4 q \geqq 0 \\ p'^2 - 4 q' \geqq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} p^2 - 4 q \leqq 0 \\ p'^2 - 4 q' \leqq 0 \end{cases}$$

Dacă $p^2 - 4 q = 0$, sau $p'^2 - 4 q' = 0$, adică dacă una din ecuațiile date, $x^2 + p x - q = 0$ sau $x^2 + p' x + q' = 0$ are o rădăcină dublă, condiția (5) cu semnul egal este satisfăcută, și atunci ecuația (4) are o rădăcină reală dublă, ceiace se poate ceti privind și valorile X_1 și X_2 date în funcție de x_1, x_2, x'_1, x'_2.

Ecuația (4) are încă rădăcini reale, când avem simultan:

$$\begin{cases} p^2 - 4 q > 0 \\ p'^2 - 4 q' > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} p^2 - 4 q < 0 \\ p'^2 - 4 q' < 0, \end{cases}$$

adică când ecuațiile:

$$x^2 + p x + q = 0, \quad x^2 + p' x + q' = 0$$

au simultan rădăcini reale sau imaginare, ceiace reiasă privind și valorile lui X_1, X_2 în funcție de x_1, x_2, x'_1, x'_2.

Observare. Au găsit ecuația (4) și condiția de realitate a rădăcinelor ei:

$$p^2 p'^2 - 4 p^2 q' - 4 p'^2 q + 16 q q' > 0,$$

fără a conchide realitatea rădăcinelor ecuației: (4) din

natura rădăcinelor ecuațiilor: $x^2+px+q=0$, $x^2+p'x+q'=0$, așa cum s'a făcut mai sus, d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (lic. Huși), *Avram Herman* (lic. Focșani), *Baștа D. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Bălean Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis N. Berardo* (lic. R.-Sărat), *Coșniță Virgil* (lic. Bârlad), *Crețoiu A.* (București), *David Gheorghe* (Timișoara), *Ebner Artur* (lic. Galați), *Flickștein I.* (Cernăuți), *Georgescu N. Ion* (Ialomița), *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, București), *Grofșorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Iliescu St. Dima* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Mitescu D-tru* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Mititelu Gh.* (Bacău), *Mușta St.* (Timișoara), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Niculescu Isaia* (Mizil) *Popescu D. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan*, *Popescu N. Niculai* (Câmpina), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Râmniceanu R.* (Tg.-Jiu), *Raubach Artur* (Gura Humorului, Bucovina), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei Basarab, București), *Stroescu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

330. *Daca a este un număr prim mai mare ca* 3, *să se arate că expresia:*

$$E = a^{2n+6} - a^{2n} - a^6 + 1,$$

e divizibilă cu 72.

SILION GH. ION

Soluție dată de d-nii: *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Căldăraru Leon* (lic. Sincai, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cligher A.* (Timișoara), *Cormanschi I.* (Timișoara), *Goldstein N.* (Timișoara), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Milner G.* (Timișoara), *Mitescu D. R.* (lic. Mil. Tg.-Mureș), *Obreja I.*, *Oprescu I. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (liceul Giurgiu), *Popescu Gh. Florian* (liceul Giurgiu), *Prundeanu I. Olt.*, *Stoica N. Aurel* (lic. Cantemir, București) și *Teodorcscu N.* (lic. Spiru Haret, București).

Expresia dată se poate scri:

$$E = a^{2n}(a^6-1) - (a^6-1) = (a^6-1)(a^{2n}-1)$$
$$= (a^3-1)(a^3+1)(a^n-1)(a^n+1)$$

a fiind prim și mai mare ca 3, este de forma:

$$a = m\,3 \pm 1,$$

atunci: $a^6 - 1 = (m\,3 \pm 1)^6 - 1 = m\,.\,3$

$$a^{2n} - 1 = (m\,3 \pm 1)^{2n} - 1 = m\,.\,3$$

și deci:

$$E = (a^6-1)(a^{2n}-1) = m\,.\,3 \times m\,.\,3 = m\,.\,9$$

De altă parte a fiind prim diferit de 2, este impar și orice putere a lui a este un număr impar astfel că factoriii lui E: a^3-1, a^3+1, a^n-1, a^n+1, se divid fiecare cu 2, deci E se divide cu $2^4 = 16$. E fiind divizibil cu 9 și 16 se divide și cu $9 \times 16 = 144$, deci și cu 72 divizorul lui 144.

Observări. 1. Vedem că E se divide chiar cu 144. 2. Dacă am fi presupus încă $a \neq 7$, atunci după teorema lui *Fermat:*

$$a^6 - 1 = m\,.\,7,$$

și E ar fi fost divizibil cu $144 \times 7 = 1008$.

S'a primit în ultimul timp soluțiuni bune dela d-nil: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beșchea N.* (lic. Brașov), *Botez St. Mihail*, *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, București), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Herscovici Emanoil* (Galați), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Petrescu St. Alex.-Dan* (lic. militar, Craiova), *Râmniceanu L. R.* (lic. Tg.-Jiu), *Șerbănescu Ovidiu* (lic. Constanța), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău),

S'a primit în ultimul timp soluțiuni dela d-l: *Drogeanu Nicolae* (Seminarul Pedagogic, București) și *Stacu Ioan* (lic. Târgoviște).

332. — *Să se arate că dacă avem:*

$$x+y+z=0,$$

avem și:

$$\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}{zx(z+2y)(x+2z)} + \frac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{xy(x+2z)(y+2x)}$$
$$+ \frac{(z^2-x^2)(x^2-y^2)}{yz(y+2x)(z+2y)} = 3.$$

IOAN C. GEORGESCU

Din relația de condiție deducem:

$$x+y=-z,\quad y+z=-x,\quad z+x=-y.$$

Folosind aceste relații, putem scri succesiv:

$$(1)\quad \frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}{zx(z+2y)(x+2z)} = \frac{(x+y)(x-y)(y+z)(y-z)}{zx(z+y+y)(x+z+z)}$$
$$= \frac{zx(y-x)(z-y)}{zx(y-x)(z-y)} = 1.$$

Permutând circular pe x, y, z avem și:

$$(2)\quad \frac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{xy(x+2z)(y+2x)} = \frac{xy(z-y)(x-z)}{xy(z-y)(x-z)} = 1$$

$$(3)\quad \frac{(z^2-x^2)(x^2-y^2)}{yz(y+2x)(z+2y)} = \frac{yz(x-z)(y-x)}{yz(x-z)(y-x)} = 1.$$

Adunând relațiile (1), (2) și (3). găsim:

$$\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}{z\,x\,(z+2y)(x+2z)}+\frac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{x\,y\,(x+2z)(y+2x)}$$

$$+\frac{(z^2-x^2)(x^2-y^2)}{y\,z\,(y+2x)(z+2y)}=3,$$

tocmai relația cerută.

Au dat bune soluțiuni d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Brașov), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Bărbulescu Gh.* (lic. Tg.-Mureș), *Beja O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis N. Berardo* (lic. R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Boju Rosetel* (lic. Timișoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Botis E. Virgil* (lic. Arad), *Caftangiogiu C. C.* (lic. R.-Sărat), *Căldăraru Leon* (lic. Sinaia, București), *Cârsteanu Traian* (Șc. Polit. Timișoara), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciufu B. Petre* (lic. R.-Sărat), *Cligher A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Constantinescu Gr. Ion, Cormanschi I.* (Șc. Polit. Timișoara), *Crașoveanu Vasile* (Șc. Polit. Timișoara), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Curcubătă Dioninu* (lic. Brașov), *David Gheorghe* (lic. Timișoara), *David I. Ion* (Buzău), *Dimitrescu A. Mihail* (lic. Roman), *Dragomir Eugeniu* (lic. Tg.-Mureș), *Fezi E. Gh.* (lic. Orhei), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Georgescu C. Ion* (lic. Pitești), *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, București), *Gherbanvsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Goldstein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Golopenția Antoniu* (lic. Timișoara), *Grofșorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Huzuneanu Gh., Ianculescu Octavian* (Timișoara), *Ionescu Bujor Th. C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Ionică Ion* (lic. Brașov), *Iscovici I. Paul* (lic. Pitești), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Lindemberg Lionell* (lic. Cantemir, București), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Adolf* (lic. Roman), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milner I.* (Șc. Polit. Timișoara), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Nedelcu C-tin* (lic. Brașov), *Nicolau* (R.-Sărat), *Niculescu Alexandru* (lic. Tg.-Mureș), *Nicolescu P. Vasile* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Obreja Iancu, Oprescu I. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Oana Ioan* (lic. Făgăraș), *Pascu D.* (lic. Brașov), *Petrescu St. Al. Dan* (lic. mil. Craiova), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Pop Iulian* (lic. Cluj), *Popa Ion* (lic. Timișoara), *Popper Ervin* (lic. Timișoara), *Prundeanu I.* (Olt), *Raubach Artur, Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Rătan Ion* (lic. Brașov), *Scripcă C. Laur* (lic. Național, Iași), *Seitan Ion* (lic. Brașov), *Șerban I. Tiberiu* (lic. Brașov), *Șerbănescu Ovidiu* (lic. Constanța), *Seserman Aurel* (lic. Suceava, Bucovina), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru, Spărchez Zeno* (lic. Brașov), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stefulescu I. Ghica* (Timișoara), *Stoian I. Ion* (lic. Brașov), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M.* (lic. Spiru-Haret, București), *Urzică Petru* (lic. P.-Neamț), *Vasilescu Gh.* (lic. Timișoara), *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău), *Wagner W. J.* (lic. Craiova), *Wallechner Emil* (Govora), și *Westfried Jean* (lic. Timișoara).

In ultimul timp s'au primit bune soluțiuni dela d-nii: *Adam I. Radu* (lic. Constanța), *Drogeanu Niculae* (Seminarul Pedagogic București) și *Herscovici Emil* (Galați).

PROBLEME PROPUSE

346. — Să se găsească patru numere consecutive divizibile, primul cu 7, al doilea cu 9, al treilea cu 11 și ultimul cu 17.

N. TEODORESCU

347. — Un automobil merge cu o viteză uniformă pe o șosea. Știind că stâlpii de telegraf sunt așezați la 30 m. unul de altul, să se stabilească formula după care s'ar putea calcula mai ușor viteza automobilului în km./oră prin numărarea stâlpilor pe lângă care trece.

ION PROTOPOPESCU

348. — Să se verifice identitatea:

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2+b^2-c^2-d^2)$$
$$-4(ab-cd)(ac-bd)$$
$$=[(a+d)^2-(b-c)^2][(a-d)^2+(b-c)^2]$$

I. DUMITRIU-ARAD

349. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z+xy+xz+yz+xyz=209 \\ x+y+t+xy+xt+yt+xyt=119 \\ x+z+t+xz+xt+zt+xzt=139 \\ y+z+t+yz+yt+zt+yzt=167 \end{cases}$$

VIRGIL COSNITA

350. — Se dă cercul C și patrulaterul A B C D cu vârfurile B, C, D pe cerc. Să se demonstreze că bisectoarea A A′ a unghiului A este perpendiculară pe dreapta B′ D′ ce unește intersecțiile cercului cu bisectoarele unghiurilor B și D.

P. TROFINOV

351. — Din punctul D exterior triunghiului A B C se duc dreptele D B și D C pe care se proiectează vârful A, în A_1 și A_2. Se proiectează apoi punctul D pe laturile A B și A C în D_1 și D_2. Cum trebuie să fie triunghiul A B C, și cum trebuie găsit punctul D, astfel ca exagonul $A\,A_1\,D_1\,D\,D_2\,A_2$ să fie regulat?

V. ALACI

Abonamentul pe anul IV-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 IUNIE 1924 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. CATEVA FORMULE DE INSUMARE
2. NOTE MATEMATICE, 8, 9.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 247, 268, 287, 308, 309, 311, 312
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile roblemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa : **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura schimbul prețului :

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL IV. — No. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

CATEVA FORMULE DE INSUMARE

de V. ALACI

Expunem în cele ce urmează o metodă elementară pentru obținerea câtorva formule remarcabile de însumare.

1. Să considerăm identitatea ușor de verificat:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) u_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(u_2 - u_1) + (a_3 + a_4 + \ldots + a_n)(u_3 - u_2) + \ldots + a_n (u_n - u_{n-1}),$$

sau mai simplu:

$$(I) \quad \sum_{k=1}^{n} a_k u_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) u_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n)(u_k - u_{k-1}).$$

Dacă notăm aci:

$$(1) \quad \begin{matrix} a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = A_k \\ u_k - u_{k-1} = U_k, \end{matrix} \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

luând $a_0 = 0$, atunci formula (I), în virtutea ei însuși se poate scri:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} a_k u_k = \sum_{k=1}^{n} A_k U_k = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) U_1 + \sum_{k=2}^{n} (A_k + A_{k+1} + \ldots + A_n)(U_k - U_{k-1})$$

Cum însă din (1) deducem:

$$A_k + A_{k+1} + \ldots + A_n = (a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n) + (a_{k+1} + \ldots + a_n) + \ldots + a_n = a_k + 2 a_{k+1} + \ldots + (n - k + 1) a_n$$

$$U_1 = u_1, \; U_2 - U_1 = u_2 - u_1 - u_1 = u_2 - 2 u_1,$$

$$U_k - U_{k-1} = u_k - u_{k-1} - u_{k-1} + u_{k-2} = u_k - 2 u_{k-1} + u_{k-2} \qquad k = 3, 4, \ldots n,$$

relația (2) devine:

$$(II) \quad \sum_{k=}^{n} a_k u_k = (a_1 + 2 a_2 + \ldots + n a_n) u_1 + [a_2 + 2 a_3 + \ldots + (n-1) a_n](u_2 - 2 u_1) + \sum_{k=3}^{n} [a_k + 2 a_{k+1} + \ldots + (n - k + 1) a_n](u_k - 2 u_{k-1} + u_{k-2}).$$

Același procedeu aplicat formulei (II) ne procură și alte formule analoage de însumare.

Dacă în formulele (I) și (II) particularizăm pe a_k și u_k astfel ca: $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$ să se poată ușor efectua, obținem însumări remarcabile.

2. Dacă luăm:

$$a_1 = a_n = 1, \; a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$

formulele (I) și (II) devin:

$$u_1 + u_n = 2 u_1 + \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}),$$

$$u_1 + u_2 = (n+1) u_1 + (n-1)(u_2 - 2 u_1) + \sum_{k=3}^{n} (n - k + 1)(u_k - 2 u_{k-1} + u_{k-2}),$$

de unde:

$$(3) \quad \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1$$

$$(4) \quad \sum_{k=3}^{n} (n - k + 1)(u_k - 2 u_{k-1} + u_{k-2}) = u_n - (n-1) u_2 + (n-2) u_1$$

Formula (3) este de altfel cunoscută şi am folosit-o în articolul „Asupra câtorva însumări" din „R. M. T.", No. 1, an. III, pentru obţinerea în mod uniform a mai multor însumări.

Formula (4) poate servi şi ea pentru obţinerea de însumări remarcabile ceiace vom face în cele ce urmează.

3. In adevăr dacă luăm:

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$$

atunci:

$$u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2} = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} - \frac{2}{(k-1)k\dots(k+p-1)} + \frac{1}{(k-2)(k-1)\dots(k+p-2)}$$

$$= \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-2)}\left[\frac{1}{(k+p-1)(k+p)} - \frac{2}{(k-1)(k+p-1)} + \frac{1}{(k-2)(k-1)}\right]$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{(k-2)(k-1)k\dots(k+p)}$$

şi formula (4) devine:

$$(5)\qquad \sum_{k=3}^{n} \frac{n-k+1}{(k-2)(k-1)\dots(k+p)} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} - \frac{n-1}{(p+2)!} + \frac{n-2}{(p+1)!}\right]$$

4. Dacă luăm:

$$u_k = \sin 2ka$$

atunci:

$$u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2} = \sin 2ka - 2\sin 2(k-1)a + \sin 2(k-2)a = 2\sin 2(k-1)a\cos 2a - 2\sin^2(k-1)a = 2\sin 2(k-1)a(\cos 2a - 1)$$

$$= -4\sin 2(k-1)a\sin^2 a,$$

şi formula (4) devine:

$$(6)\quad \sum_{k=3}^{n}(n-k+1)\sin 2(k-1)a = \frac{(n-1)\sin 4a - (n-2)\sin 2a - \sin 2na}{4\sin^2 a}$$

5. Să considerăm din nou formulele generale (I) şi (II).

Dacă luăm:

$$a_k = 1,\ u_k = q^k,\ k = 1, 2, \dots n,$$

atunci formulele (I) şi (II) devin:

$$\frac{q^{n+1}-q}{q-1} = nq + \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)(q^k - q^{k-1})$$

$$= nq + (q-1)\sum_{k=2}^{n}(n-k+1)q^{k-1}$$

$$\frac{q^{n+1}-q}{q-1} = \frac{n(n+1)}{2}q + \frac{(n-1)n}{2}(q^2 - 2q)$$

$$+ \sum_{k=3}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}(q^k - 2q^{k-1} + q^{k-2})$$

De aci deducem:

$$(7)\quad \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)q^{k-2} = \frac{q^n - nq + n - 1}{(q-1)^2}$$

$$(8)\quad \sum_{k=2}^{n}(n-k+1)(n-k+2)q^{k-3} = \frac{2(q^n-1)}{(q-1)^3} + \frac{n(q-3)}{(q-1)^2} - \frac{n^2}{q-1}$$

6. Dacă luăm:

$$a_k u_k = 1,\ k = 1, 2, \dots n,$$

atunci:

$$u_k = \frac{1}{a_k}$$

şi formulele (I) şi (II) devin:

$$n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}(a_k + a_{k+1} + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}}\right)$$

$$n = (a_1 + 2a_2 + \dots + na_n)\frac{1}{a^2} + [a_2 + 2a_3 + \dots + (n-1)a_n]\left(\frac{1}{a_2} - \frac{2}{a_1}\right) + \sum_{k=3}^{n}(a_k + 2a_{k-1} + \dots + (n-k+1)a_n]\left(\frac{1}{a_k} - \frac{2}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k-2}}\right)$$

De aci deducem:

$$(9)\quad \sum_{k=2}^{n}\frac{(a_k + a_{k+1} + \dots a_n)(a_{k-1} - a_k)}{a_k a_{k-1}} = n - \frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{a_1}$$

$$(10)\quad \sum_{k=3}^{n} \frac{[a_k + 2a_{k+1} + \ldots + (n-k+1)a_n](a_{k-1}a_{k-2} - 2a_k a_{k-2} + a_k a_{k-1})}{a_k\ a_{k-1}\ a_{k-2}} = n - \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + n a_n}{a_1}$$
$$- \frac{[a_2 + 2a_3 + \ldots + (n-1)a_n]a_1 - 2a_2)}{a_1 a_2}$$

7) Dacă în formulele (9) şi (10) luăm:

$$a_k = k,$$

şi observăm că:

$$a_k - a_{k+1} + \ldots + a_n = k + (k+1) + \ldots + n = \frac{(n+k)(n-k+1)}{2}$$

$$a_k + 2a_{k+1} + \ldots + (n-k+1)a_n = k + 2(k+1) + \ldots (n-k+1)(k+n-k) = k[1 + 2 + \ldots (n-k+1)] + [1.2 + 2.3 + \ldots + (n-k)(n-k+1)] =$$
$$\frac{(n-k+2)(n-k+1)k}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{3} = \frac{(n-k+2)(n-k+1)(2n+k)}{6}$$

ele devin după oarecare simplificări:

$$(11)\quad \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-k+1)(n+k)}{k(k-1)} = n(n-1)$$

$$(12)\quad \sum_{k=3}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)(2n+k)}{k(k-1)(k-2)} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

NOTE MATEMATICE

8. — *Discuţia ecuaţiei bipatrată.* Cu ocazia redijărei problemelor 2615 şi 2849 din *Gazeta Matematică* am constatat că majoritatea corespondenţilor care au atacat aceste probleme nu au putut să le discute. Dau această notă pentru a reaminti nişte noţiuni care pot fi utile la discuţia unor astfel de ecuaţiuni. Fie

$$(1)\quad x^4 + px + q = 0$$

o ecuaţie bipatrată şi

$$(2)\quad y^2 + py + q = 0$$

ecuaţia ce se obţine din (1) dacă se înlocueşte x^2 prin y. Prima condiţie ca rădăcinile ecuaţiei (1) să fie reale este ca rădăcinile ecuaţiei (2) să fie reale, adică trebuie să avem

$$(3)\quad p^2 - 4q \geqq 0$$

Condiţiunea (3) fiind îndeplinită se deosebesc următoarele cazuri.

1. Când rădăcinile y_1, y_2 ale ecuaţiei (2) sunt pozitive, toate rădăcinile ecuaţiei (1) sunt reale şi egale cu $\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}$. Ţinând seamă de relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini, acestea au loc când

$$p < 0 \text{ şi } q > 0.$$

2. Când rădăcinile ecuaţiei (2) sunt de semne contrare, ecuaţia (1) are 2 rădăcini reale, egale cu $\pm\sqrt{y_1}$ sau cu $\pm\sqrt{y_2}$ şi 2 rădăcini imaginare. Pentru aceasta e destul să avem

$$q < 0.$$

3. Când rădăcinile ecuaţiei (3) sunt negative, ecuaţia (1) are toate rădăcinile imaginare. — Aceasta are loc când

$$p > 0 \text{ şi } q > 0.$$

4. In fine, când

$$p^2 - 4q < 0$$

ecuaţia (1) are toate rădăcinile imaginare.

Următorul tablou rezumă discuţia:

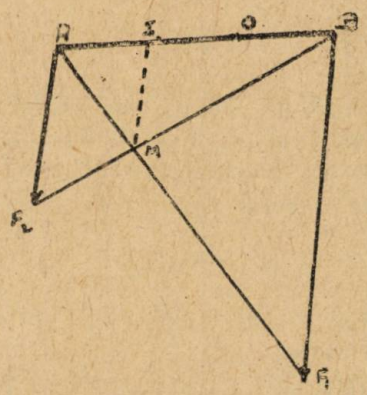
I. $p^2 - 4q \geqq 0$ {
- $p < 0$ şi $q > 0$, 4 reale
- $q < 0$ şi p ori cum, 2 reale şi 2 imaginare
- $p > 0$ „ $q > 0$, 4 imaginare

II. $p^2 - 4q < 0$ 4 rădăcini imaginare

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

9. *Incă 2 metode pentru aflarea punctului de aplicaţie al rezultantei a 2 forţe paralele.*

In cele ce urmează dau 2 metode pentru aflarea punctului de aplicație al rezultantei a 2 forțe paralele.



I. Unim punctul A cu extremitatea forței F_1, punctul B cu extremitatea forței F_2. Din punctul de întâlnire M al acestor 2 drepte AF_1 și BF_2 ridicăm o paralelă la direcția forțelor, care întâlnește pe AB în I. Cu compasul luăm distanța AI și o punem din B înspre A pe AB. Punctul O este punctul căutat, $OB = AI$.

Această construcție e motivată de următorul calcul:

Din triunghiul ABF_2 în care $OI \parallel AF_2$ avem:

(1) $\frac{OI}{(F_2)} = \frac{IB}{AB}$, și în triunghiul ABF_1 avem:

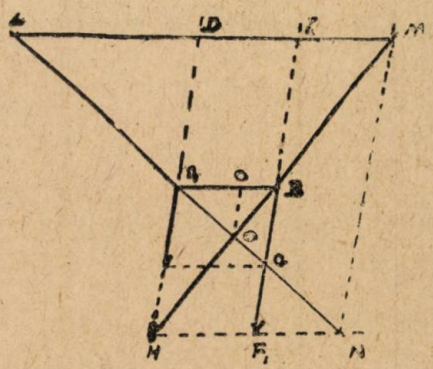
(2) $\frac{AI}{AB} = \frac{OI}{(F_1)}$. Insemnăm $AF_2 = F_2$, $BF_1 = F_1$, $F_1 + F_2 = R$

Impărțind membrul întâi din (1) cu membrul al 2-lea din (2) și al 2-lea cu I-ul din (2) obținem

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{IB}{IA} \quad ** \quad AI = \frac{AB \times F_2}{R}$$

Dacă se calculează segmentul din AB dintre punctul de aplicație al rezultantei și B se găsește că este egal tot cu $\frac{AB \cdot F_2}{R}$; deci construcția e motivată. O construcție analoagă se face când forțele sunt egale și de sens contrar.

II) Această metodă e mai puțin simplă și ea nu va putea fi întrebuințată cu folos, decât atunci când una din metodele cunoscute, mai rapide, nu se vor putea executa.



Se cunoaște construcția dată de d-l profesor *V. Vâlcovici* într'unul din numerile precedente ale R. M. T. Bazat pe această construcție efectuez următoarele construcțiuni.

Prelungesc pe AG până întâlnește paralela dusă prin extremitatea forței F_1 la AB în N. Din N ridic o paralelă la direcția forțelor până întâlnește pe BH în M. Din M duc o paralelă la AB până întâlnește pe AG în L. Prelungesc direcțiile forțelor F_1 și F_2 până în C și D. Dacă voi putea cunoaște mărimea segmentelor $BC = AD$, CM, LD construcția pe care o pot da este următoarea:

Prelungesc direcția forței F_1 cu segmentul de dreapta CB cunoscut. Din C duc o paralelă la AB și iau lungimea CM cunoscută. Am determinat poziția punctului M. Tot așa luând din D segmentul LD cunoscut determin poziția lui L. M și L unite cu B și A ne dă dreptele BM și LA care prelungite ne dau punctul O de intersecție. Din O, o paralelă la direcția forțelor ne va da punctul de aplicație în O'. $BC = AD$, CM și LD sunt date de următoarele calcule;

Din triunghiul NHA în care $GF_1 \parallel AH$ avem:

$$\frac{GF_1}{AH} = \frac{F_1N}{NH} \text{ însemnăm } \begin{matrix} BF_1 = F_1 = AH \\ AF_2 = BG = F_2 \end{matrix}$$

$$\frac{F_1 - F_2}{F_1} = \frac{F_1N}{AB + F_1N} \quad ** \quad F_1N = CM = \frac{AB(F_1 - F_2)}{F_2}$$

Din triunghiul MHD în care $CB \parallel HD$, avem:

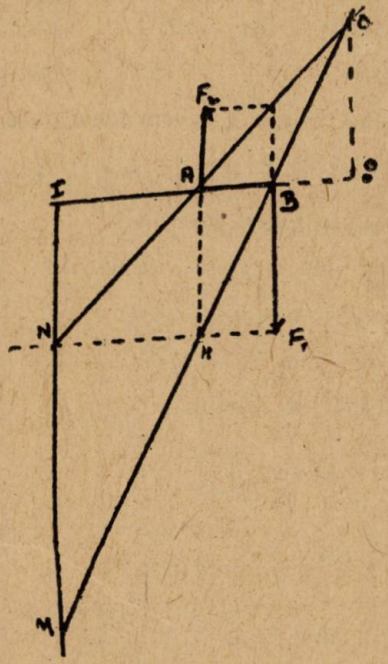
$$\frac{CB}{DH} = \frac{CM}{DM} \quad ** \quad \frac{CB}{F_1} = \frac{F_1 - F_2}{F_2} \quad CB = \frac{F_1(F_1 - F_2)}{F_2}$$

Din triunghiul LCG în care $AD \parallel GC$ avem:

$$\frac{AD}{CG} = \frac{LD}{LC} \quad ** \quad \frac{F_1(F_1 - F_2)}{F_2^2} = \frac{LD}{AB}$$

$$LD = \frac{AB \cdot F_1 , (F_1 - F_2)}{F_2^2} = \frac{CB \times CM}{F_1 - F_2}$$

Toate aceste 3 lungimi se pot construi fiind a patra proporţională între cantităţi care se pot determina şi sunt date. L A G M este chiar poligonul funicular al forţelor F_1 şi F_2. O construcţie analoagă se poate efectua şi când forţele sunt de semne contrare.



In cazul acesta o construcţie mai uşoară ar fi următoarea. Ducem A I, din I coborîm o paralelă la direcţia forţelor. Determinăm poziţiile punctelor N şi M care unite cu A şi B ne dau dreptele N A şi M B, care se întâlnesc în O. Ducem apoi o paralelă până în O'. O' este punctul de aplicaţie al rezultantei. $IA = \frac{F_1 AB}{F_2} = NH$ din triunghiul GNF_1 unde $AB \parallel NF_1$. $MN = \frac{F_1^2}{F_2}$ din triunghiul M I B unde $HN \parallel BI$.

ADRIAN STAMBULEANU
Student Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. *Buletinul de Matematică pură şi aplicată*, anul III, No. 6, Februarie. Teoria Determinanţilor (Din cursul d-lui profesor, Tr. Lalescu, redactat de d-l Traian Dordea, student). Asupra unor ecuaţii din calculul vectorial, de *N. Abramescu*. Societatea Studenţilor în Matematică, de *E. Abason* şi *T. Tănăsescu*.

2. *Gazeta Matematică*, anul XXIX, No. 9, Mai 1924. Asupra spiralei logaritmice, de *N. Abramescu* Asupra determinantului simetric stâng, de *Th. Angheluţă*.

3. *Foaia Matematică*, an. I, No. 4, Aprilie 1924. Aplicaţii ale cercului lui *Euler*, de *N. Profiri*.

4. *Foaia Matematică*, an. I, No. 5, Mai 1924. Asupra unor limite, de *L. Weiss*.

5. *Jurnal Matematic*, vol. I. No. 11, 1 lunie 1924. Asupra seriilor divergente de, *T. P.* Asupra curbelor de clasa a treia analagmatice în coordonate tangenţiale triliniare, de T. P. Determinanţi pseudosimetrici, de T. P.

PROBLEME REZOLVATE

247. — Să se verifice identitatea:

$$\Sigma \sin 2a \sin (b+c) \sin (b-c) =$$
$$2 \sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a)$$

MAIOR O. BUGEANU.

Prima soluţie dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Apăteanu Camil* (lic. Arad), *Bărglăzan Aurel* (Şc. Polit. Timişoara), *Bercovici Emil*, *Beju O. Train* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Botiş E. Virgil* (lic. Arad), *Cândea Ioan* (lic. Sibiu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cocorandu M.* (Sc. Polit. Timişoara), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Coşereanu Ion* (Sc. Polit. Timişoara), *Dumitrescu Gh. Marin*, *Dobre V.* (Cond. de Lucrări Publice), *I. N. Georgescu-Val*, *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Grofşorean I. Gh.* (lic. Arad), *Gulian Emil* (lic. Giurgiu), *Harnagea Iorguţă* (lic. Huşi), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pinçu* (student), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Pătroiana I. Mihail* (lic. M-rea Dealu,) *Popovici Th. Ioan*, *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Silion Gh. Ion* (Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Stamatiu*

Mihail (Sc. Polit. București), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stănescu A. Nicolae* (Sc. Polit. Timișoara), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Vasilescu Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

Pornim dela membrul al 2-lea și ușor putem urmări egalitățile ce se succed:

$$2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a) = 2(\sin a\cos b - \cos a\sin b)(\sin b\cos c - \cos b\sin c)(\sin c\cos a - \cos c\sin a) = 2\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c)(\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a) = 2\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c(-\operatorname{tg} a\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 b\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg} b + \operatorname{tg}^2 a\operatorname{tg} c + \operatorname{tg}^2 b\operatorname{tg} a) = 2\cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c \times \Sigma \operatorname{tg} a(\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 c) = \Sigma 2\sin a\cos a(\sin^2 b\cos^2 c - \sin^2 c\cos^2 b) = \Sigma \sin 2a\sin(b+c)\sin(b-c)$$

și avem astfel identitatea cerută.

Soluția 2-a dată de d-nii: *Adam I. Mircea*, *Bobărnoc Mircea* (Sc. Polit. Timișoara), *Iliescu E.* (Vâlcea), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie).

Fie determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} \sin^2 a & \sin a & \cos a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \sin b & \cos b & \cos^2 b \\ \sin^2 c & \sin c & \cos c & \cos^2 c \end{vmatrix}$$

Il desvoltăm după coloana 2^a și obținem:

(1) $E = -\sin a\cos a D_1 + \sin b\cos b D_2 - \sin c\cos c D_3$,

în care:

$$D_1 = \sin^2 b\cos^2 c - \cos^2 b\sin^2 c = \sin(b+c)\sin(b-c)$$

$$-D_2 = \sin^2 c\cos^2 a - \cos^2 c\sin^2 a = \sin(c+a)\sin(c-a)$$

$$D_3 = \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b = \sin(a+b)\sin(a-b)$$

Ducând aceste valori în (1) și înmulțind cu 2, obținem:

(2) $2D = -\Sigma \sin 2a\sin(b+c)\sin(b-c)$

Acelaș determinat D, îl mai putem dezvolta și astfel, folosind regula lui *Vandermonde:*

$$D = \cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{tg} a & 1 \\ \operatorname{tg}^2 b & \operatorname{tg} b & 1 \\ \operatorname{tg}^2 c & \operatorname{tg} c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 a\cos^2 b\cos^2 c(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} c)(\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c)$$

$$= \cos^2 a\cos b\cos^2 c\left(\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}\right)\left(\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin c}{\cos c}\right)\left(\frac{\sin b}{\cos b} - \frac{\sin c}{\cos c}\right)$$

(3) $D = -\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$

Comparând (1) cu (3), avem identitatea propusă.

Soluția 3 dată de d-l *Berdan C.* (Bârlad).

Dacă în identitatea algebrică:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

punem: $x = \operatorname{tg} a$, $y = \operatorname{tg} b$ $z = \operatorname{tg} c$

și ținem seamă de relațiile:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c = \frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}$$

$$\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 c = \frac{\sin(b+c)\sin(b-c)}{\cos^2 a\cos^2 c} \text{ etc.}$$

obținem multiplicând cu 2.

$$2\sum \frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin(b+c)\sin(b-c)}{\cos^2 b\cos^2 c} = 2\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}\cdot\frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c}\cdot\frac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a}$$

$$\Sigma \cos 2a\sin(b+c)\sin(b-c) = 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$$

Observări. 1. Alte soluțiuni date de domnii: *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București) și *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani).

2. *D-l Berdan* observă că dăcă în identitatea dată înlocuim acele a, b, c cu $\frac{\pi}{4} - a$, $\frac{\pi}{4} - b$. $\frac{\pi}{4} - c$, obținem identitatea:

$$\Sigma \cos 2a\cos(b+c)\sin(b-c) = 2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

3. Adunând identitatea dată cu aceasta din urmă, obținem încă o identitate, anume:

$$\Sigma \cos(2a - b - c) \sin(b - c)$$
$$= 4 \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a)$$

In ulimul timp s'a primit soluții dela d-nii: *Constantinescu Gr. Ion, David I. Ioan, Lepădatu I. Victor, Popovici C. C-tin*, și *Șerban I. Tib.*

268. — *Să se găsească un număr de patru cifre în care suma produselor primelor trei luate două câte două, să fie egală cu produsul ultimelor trei cifre, iar ultima să fie îndoitul primei mărit cu unitatea.*

DRAGOMIR N. IOAN

Soluție dată de d-nii: *Bârglăzan N. Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Bercovici Sigmund* (lic. Pitești), *Bolgiu Ovidiu* (liceul Cantemir, București), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Cantacuzino I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută G.* (Șc. Polit. Timișoara), *Crețoiu A.* (București), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Demetrescu George* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Diaconovici Radu* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Dospinoiu N.* (București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Maria Solomon* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Moroianu I. Al.* (lic. Constanța), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stambuleanu A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

Fie $a\,b\,c\,d$ numărul cerut. Conform enunțului avem:

$$\begin{cases} ab + ac + bc = bcd \\ d = 2a + 1 \end{cases}$$

Prima relație ținând seamă de a doua, devine:

$$ab + ac + bc = bc(2a + 1)$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad a(b + c) = 2abc.$$

sau: $$b + c = 2bc,$$

care în numere întregi e satisfăcută numai de:

$$b = c = 0 \quad \text{și} \quad b = c = 1.$$

Numărul căutat este astfel de forma:

$$a\,0\,0\,d, \quad a\,1\,1\,d,$$

Cum, $d = 2a + 1$, deducem ușor:

Pentru $a = 1$, $d = 3$
„ $a = 2$, $d = 5$
„ $a = 3$, $d = 7$
„ $a = 4$, $d = 9$.

Numerile cerute sunt deci:

1003, 2005, 3007, 4009, 1113, 2115. 3117, 4119.

Observări, 1. A găsit numai primele 4 soluții, dl: *Brădățeanu C. Cornel* (lic. Spiru Haret, București),

2. Au găsit numai ultimele 4 soluții, d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (lic. Național, Iași), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bălean G.* (lic. Timișoara), *Barbu Alexandru* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Baștа D. Gheorghe* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Bercovici A. Emil* (student) *Braierster I. D-tru* (lic. Național, Iași), *Bruno Ștefani* (Șc. Polit. Timișoara), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Diaconu Gh.* (lic. Tg.-Mureș), *Dumitriu M. Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Drogeanu N. Niculae* (Seminarul Pedagogic, București), *Dumitrescu Alexandru* (Seminarul Pedagogic, București), *Dumitrescu Gh. Marin* (Slatina-Olt), *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Pitești), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Florescu M Octavian* (lic. Caracal), *Gataiantu Barbu* (lic. Caracal), *I. N. Georgescu-Val, Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Goldstein L. M.* (Sem. Pedagogic, București), *Grigorescu L. Ion* (lic, M-rea Dealu), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Gulian Emil* (lic. Giurgiu), *Herscovici Emanoil* (lic. Galați), *Hîlmu V. Victor* (lic. Matei Basarab), *Horvat Pavel* (lic. Orăștie), *Kassargian A.* (lic. Cantemir, București), *Katz Pincu* (Sc. Polit. București), *Katz S.* (lic. Botoșani), *Iliescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru Haret, București), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu Tr.* (lic. Giurgiu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milculescu G. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Mitescu D.* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Nicolescu Angelo* (lic. Tg.-Mureș), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popovici Chr. Jean* (lic. Galați), *Popovici Dan Puiu* (lic. M-rea Dealu), *Propst Jean* (Șc. Polit. Timișoara), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Șeptelici Paul* (Șc. de Artilerie), *Serghiev A. Ioan* (lic. Chișinău), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei Basarab, București), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Ped. București), *Stamatiu Mihail* (Șc. Polit București), *Stănciulescu George* (Pitești) *Stănescu A. Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Stoenescu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Stroescu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Șușelescu Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Teodo-*

rescu Florin (lic. Tg.-Mureş), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu Gheorghe* (lic. Timişoara), *Weiss Solomon* (lic. Galaţi) şi *Zoican A.Aurel.*

3. A găsit 2 soluţii d-l: *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu).

4. O singură soluţie au dat d-nii: *Antoniu S. Simion* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Epure T. Ştefan* (lic. Buzău), *Ionescu G. Ioan* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Lăzărescu M. Vasile* (Giurgiu), *Musta Şt.* (Timişoara), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Vasiliu C. Ioan* (lic. Tg.-Mureş) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

287. — *Să se găsească o fracţie, ştiind că suma patratelor termenilor unei fracţii echivalente cu ea este 41209.*

EMIL STEFANESCU

Fie $\frac{x}{y}$ fracţia cerută; o fracţie echivalentă cu ea este de forma, $\frac{mx}{my}$, $m \neq 1$. Conform enunţului trebue să avem:

$$m^2(x^2+y^2) = 41209 = 7^2 \times 29^2$$

$$\text{sau} \quad x^2+y^2 = \left(\frac{7^2 \times 29}{m}\right)^2$$

Trebuie să satisfacem în numere întregi această relaţie.

Pentru m nu putem lua decât: $m=7$, sau $m=29$.

1. Dacă, $m=7$, atunci:

$$x^2+y^2 = 29^2 = 841. \tag{1}$$

Evident că numerile x şi y trebuie să fie unul par şi altul impar, vom lua deci:

$$x = 2p, \quad y = 2q+1,$$

şi (1) devine:

$$4p^2+4q^2+4q+1 = 841$$

sau:
$$p^2+q^2+q = 210 \tag{2}$$

Cum, $q^2+q = q(q+1)$ se divide cu 2, trebuie ca p să fie par, deci de forma: $p=2r$, atunci din (2) deducem:

$$4r^2 = 210 - q^2 - q. \tag{3}$$

Observăm că, $210-q^2-q$ trebuie să fie un patrat perfect divizibil cu 4, deci pentru q nu putem lua numere impare şi nici numere multiple de 4. Vom încerca deci numai:

$$q=2, \quad q=6, \quad q=10 \text{ şi } q=13.$$

Vedem că numai $q=10$ satisface relaţia (4), In care caz:

$$4r^2 = 100, \text{ deci } r=5.$$

Rezultă atunci: $p=10$, $q=10$ şi deci:

$$x=20, \quad y=21.$$

evident şi: $x=21$, $y=20$.

Fracţiile $\frac{20}{21}$, $\frac{21}{20}$ satisfac enunţul.

2. Dacă $m=29$, atunci:

$$x^2+y^2 = 7^2 = 49,$$

şi aici trebuie ca x şi y să fie de forma:

$$x = 2p, \quad y = 2q+1,$$

în care caz trebuie să avem:

$$4p^2+4q^2+4q+1 = 49$$

sau:
$$p^2+q^2+q = 12,$$

care nu poate fi satisfăcută în numere întregi.

Singurile fracţii care satisfac enunţul sunt deci: $\frac{20}{21}$ şi $\frac{21}{20}$.

Soluţii date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Bălean G.* (lic. Timişoara), *Berdan C.* (Bârlad), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Botea Gh Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Enulescu Ovidiu* (lic. Chişinău), *David Gh.* (lic. Timişoara), *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Galescu Teodor* (Iaşi), *Georgescu I. Chiriac* (Ialomiţa), *Ghilezan Moise* (lic. Timişoara), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Bucureşti)' *Mitescu D-tru Remdecht* (lic. Tg.-Mureş), *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa), *Negretzu Florea* (lic. Piteşti), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popescu Florian* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rabinovici S.* (Timişoara), *Serghiev A. Ion* (lic. Chişinău), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei Basarab, Bucureşti) şi *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

308. — *Să se determine α, astfel ca rădăcinele x_1, x_2 ale ecuaţiei:*

$$(3\alpha^2-4\alpha-3)x^2-(5\alpha^2-6\alpha-3)x-\alpha^2-\alpha+12=0$$

să satisfacă relaţiunea:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_3 - x_1 x_2 - 4}$$

Să se rezolve apoi ecuaţiunea:

V. COSNITA

1. Luând tangenta ambilor membrl ai relaţiei de condiţie, şi folosind relaţia evidentă:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} a) = a,$$

relaţia de condiţie din enunţ devine

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 4}$$

Dezvoltând primul membru, unde avem tangenta sumei a două arce, găsim:

$$\frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 4}$$

De unde:

$$(x_1 + x_2)\left(\frac{1}{1 - x_1 x_2} - \frac{1}{x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 4}\right) = 0$$

$$(1) \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{matrix}$$

Folosind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, relativ la ecuaţia din enunţ, relaţiile (1) devin:

$$\frac{5\alpha^2 - 6\alpha - 3}{3\alpha^2 - 4\alpha - 3} = 0, \qquad \frac{5\alpha^2 - 6\alpha - 3}{3\alpha^2 - 4\alpha - 3} = 5,$$

sau după simplificări găsim:

$$5\alpha^2 - 6\alpha - 3 = 0, \qquad 5\alpha^2 - 7\alpha - 6 = 0,$$

Rezolvind aceste ecuaţiuni, avem:

$$\alpha = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} \quad \text{şi} \quad \alpha = \frac{7 \pm 13}{10}$$

Pentru aceste valori a lui α, rădăcinele ecuaţiei date satisfac relaţia cerută în enunţ.

2. Să introducem acum aceste valori ale lui α, în ecuaţia dată şi să rezolvăm ecuaţiile astfel obţinute.

Pentru $\alpha = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$, coeficientul lui x din ecuaţia dată find nul, ea devine:

$$\left[3\left(\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}\right) - 3\right] x^2 = \left(\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}\right)^2 + \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} - 12$$

De unde: $x = \pm \sqrt{\frac{131 \mp 11\sqrt{6}}{18 \pm 2\sqrt{6}}}$

Pentru $\alpha = \frac{7 + 13}{10} = 2$, ecuaţia dată devine:

$$x^2 = 5x + 6 = 0,$$

de unde:

$$x_1 = 2 \text{ şi } x_2 = 3$$

In fine pentru $\alpha = \frac{7 - 13}{10} = -\frac{3}{5}$, ecuaţia dată devine:

$$2x^2 - 10x + 51 = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{5 \pm i\sqrt{77}}{2}$$

Au găsit pentru α numai valorile $\alpha = 2$, $\alpha = -\frac{3}{5}$ şi au rezolvat bine ecuaţiile corespunzătoare, d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (Huşi), *Beju O. Traian* (Arad), *Bercovici Emil* (student), *Bernardis N. Berardo* (R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Nicolae* (Bucureşti), *Botiş E. Virgil*, (Arad), *Calmanovici Savu* (Bucureşti), *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Ciută G.* (Timişoara), *Constantinescu Gh. Ioan* (Chişinău), *Dumitrescu Gh. Marin* (Craiova), *Ebner Arthur* (Galaţi), *Frătici Ioan* (Braşov), *Georgescu I. Chiriac* (Buzău), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Gradin I. Gheorghe* (Câmpina), *Grofşorean I. Gheorghe*, *Gulian Emil*, (Giurgiu), *Herşcovici Emanoil* (Galaţi), *Katz Pincu* (Bucureşti), *Marinescu Tr.* (Giurgiu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Nicolau C-tin* (R.-Sărat), *Pamula Alexandru* (Botoşani), *Popovici Th. Ioan* (Bucureşti), *Popescu Ep.* (Galaţi), *Rauchbach Artur* (Gura Humorului), *Samoilă D-tru* (Câmpina), *Sergheiev A. Ion* (Chişinău), *Silion Gh. Ion* (Braşov), *Stamatescu-Val* (Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (Bucureşti), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Ştefănescu Emil* (Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (Bucureşti), *Teodorescu N. D-tru* (Bucureşti), *Vasiliu C. Ion* (M-rea Dealu) şi *Weiss Solomon* (Galaţi).

Au schiţat numai soluţiunea şi au făcut calcule greşite d-nii: *Berdan C.* (Bârlad) şi *Brül Leon* (Bucureşti).

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Constantinescu Cr. Ion*, *David I. Ioan*, *Epure Ştefan*, *Percea Viorel*, *Popovici C. C-tin*, *Simionescu D. Gh.* şi *Tăraş Vasile*.

309. — *Să se găsească un număr de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor sale dă un cub perfect, iar suma cifrelor un pătrat perfect.*

TRAIAN N. ANGELESCU

Soluţie dată de d-l *Popovici Th. Ioan* (liceul Mihai Viteazul, Bucureşti) şi *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti).

Fie abc numărul cerut. Produsul, $a \times b \times c$ fiind cub perfect şi cel mult $9 \times 9 \times 9 = 729$, rezultă că, $a \times b \times c$, nu poate fi de cât: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 sau 729.

Să descompunem aceste cuburi în produse de 3 factori de o singură cifră și să le alegem numai pe acele a căror sumă e patrat perfect. In adevăr avem:

$$1=1\times1\times1,\ 8=1\times1\times8=1\times2\times4=2\times2\times2,$$

$$27=1\times3\times9=3\times3\times3$$

$$64=1\times8\times8=4\times4\times4=2\times4\times8,$$

$$125=5\times5\times5,\ 216=4\times6\times9=6\times6\times6;$$

$$343=7\times7\times7,\ 512=8\times8\times8,\ 729=9\times9\times9.$$

Dintre acestea vedem că numai 27, descompus în forma:

$$27=3\times3\times3,$$

este astfel că suma cifrelor este patrat perfect. Singura soluție a problemei este numai, 333.

Soluții bune, dar mai lungi sau mai puțin motivate, date de d-nii: *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Blasco Beatrix* (Lugoj), *Blumenfeld David* (lic. Botoșani), *Bocancea I. Kirilă* (lic. Tg.-Mureș), *Boju Rosetel* (lic. Timișoara), *Botea G. Nicole* (lic. Cantemir, București), *Brădețeanu C. Cornel* (Craiova), *Comănescu Al.-Bălteni*, *Ciorânescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Dimitriu Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Gataiantu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleșteanu Mihail* (lic. Timișoara), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Ghelber Mauricin* (Seminarul Pedagogic, București), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grofșorean Gheorghe* (lic. Arad), *Goldștein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Herșcovici Emanoil* (lic. Galați), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg. Mureș), *Iliescu Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu St. Virgil* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Lăzărescu M. Vasile* (Giurgiu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Mitescu D-tru Remdecht* (lic. Tg.-Mureș), *Nedelcu Gh. Ilie* (lic. Giurgiu), *Nicolescu P. Vasile* (lic. Tg.-Mureș), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Pudilă C-tin* (lic. Brașov), *Rădulescu Titu* (iic. M-rea Dealu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatescu I. Valeriu* (Seminarul Pedagogic, București), *Șușelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu M. Dumitru* (lic. Mihai Viteazul, București), *Vaida Mihail* (lic. Caransebeș), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu C. Ioan* (lic. Tg.-Mureș), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara) și *Vlădeanu Tiberiu* (lic. M-rea Dealu).

In ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: *Braierșter Otto, Diaconu B. Marin, Feneșan Iancu, Mihăilescu Romeo, Percea Viorel, Popovici C. C-tin, Samoilă D-tru, Silion Ion, Tărăbuță C. Paul* și *Weiss Solomon.*

311. *Să se rezolve ecuația;*

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)+2(x-3)+3(x-4)+4(x-5)+5(x-6)}=24$$

DAVID GHEORGHE

Soluție dată de d-l *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București).

Ecuația se poate scrie;

$$(1)\qquad \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{5(3x-14)}=24,$$

sau:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=2.3.4.5(3x-14)$$

Se observă aci că $x=5$ verifică ecuația, fiindcă:

$$5.4.3.2\equiv2.3.4.5.1.$$

De assmenea și $x=7$ verifică, căci:

$$7.6.5.4\equiv2.3.4.5.7=6.4.5.7$$

Deci 5 și 7 sunt rădăcini ale ecuației date.

Acum să aducem la formă întreagă ecuația (1), avem:

$$(x^2-x)(x^2-5x+6)=120(3x-14)$$

$$(2)\quad {}^{*}_{*}{}^{*}\quad x^4-6x^3+11x^2-366x+1680=0$$

Cum 5 și 7 știm că sunt două rădăcini ale acestei ecuații, primul membru din (2) se divide cu:

$$(x-5)(x-7)=x^2-12x+35$$

Efectuând împărțirea, ecuația (2) se poate scri:

$$(x^2-12x+35)(x^2+6x+48)=0$$

$${}^{*}_{*}{}^{*}\quad \begin{cases} x^2-12x+35=0 \\ x^2+6x+48=0 \end{cases}$$

Rădăcinele primei ecuații sunt 5 și 7, iar a celei de a doua sunt:

$$x=-3\pm i\sqrt{39}$$

Soluții bune date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Blasco Beatrix* (Lugoj), *Boju-Rosetel* (lic. Timișoara), *Bosie V.* (lic. Internat, Iași), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Diaconu Gheorghe, Dumitrescu Sile* (Câmpina), *Gârleșteanu Mihail* (lic. Timișoara), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, București), *Goldstein Marcel* (Seminarul Pedagogic, București), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu Pompiliu* (lic. Tg.-Mureș), *Ianculescu Octavian* (Șc. Indus. Timișoara), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Herscovici Emanoil* (lic. Galați), *Mitescu D-tru Remdecht* (lic. Tg.-Mureș), *Nicolau C.* (lic. R. Sărat), *Nicolescu P. Vasile* (llc. Tg.-Mureș), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Samoilă Dumitru* (lic. Câmpina), *Șerban Tiberiu* (lic. Brașov),

Şerbănescu O. (Constanţa), *Schlesinger I. Paul* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Teodorescu M. Dumitru* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti) şi *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Beldie N. Dtru, Beşchea N., Ciorănescu I. C-tin, Petrescu Şt., Alex. Dan,* şi *Tărăbuţă C. Paul.*

312. — *Dacă* x_1, x_2, x_3 *sunt rădăcinele ecuaţiei:*

$$x^3+(b+c-1)x^2+bx+c=0,$$

se cere să se stabilească relaţia:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1+\operatorname{arc\,tg} x_2+\operatorname{arc\,tg} x_3=\frac{\pi}{4}$$

EMIL ŞTEFANESCU

Soluţiune dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Bernardis N. Berardo* (lic. R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Blumenfeld N. David* (lic. Botoşani), *Bosie Valeriu* (lic. Internat, Iaşi), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciută G.* (Timişoara), *Georgescu I. Chiriac* (Ialomiţa), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *I, Flickstein* (Cernăuţi), *Frătici Ioan* (lic. Braşov), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Herşcovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Lupan Em.* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Mihăilescu C. Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Nicolau Gh. C.* (lic. R.-Sărat), *Obreja Iancu, Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rauchbach Arthur* (lic. Gura Humorului), *Serghiev A. Ion* (lic. Chişinău), *Stamatescu I. Valeriu* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Teodorescu M, D-tru* (lic. Mihai-Viteazul Bueureşti), *Tunaru R. Traian* (Craiova), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Vlaţiu L. Laurenţiu* (lic. Constanţa).

Dacă notăm:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1=\alpha,\quad \operatorname{arc\,tg} x_2=\beta,\quad \operatorname{arc\,tg} x_3=\gamma,$$

sau:

$$(1)\qquad \operatorname{tg}\alpha=x_1,\quad \operatorname{tg}\beta=x_2,\quad \operatorname{tg}\gamma=x_3,$$

atunci relaţiunea din enunţ devine:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$$

Luând tangenta ambilor membri şi dezvoltând avem:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=1,$$

sau ţinând seama de (1), putem scrie încă:

$$(2)\qquad \frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}=1.$$

Rămâne să stabilim această relaţie (2), echivalentă cu cea cerută, x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinele ecuaţiei date.

Privind ecuaţia dată, putem scri relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, adică:

$$x_1+x_2+x_3=-(b+c-1)$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$$
$$x_1x_2x_3=-c.$$

Primul membru al relaţiei (2) devine astfel:

$$\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}=\frac{-b-c+1+c}{1-b}=\frac{1-b}{1-b}=1$$

Relaţiunea cerută, sau cea echivalentă cu ea (2), este deci stabilită.

Observare. D-l *I. N. Georgescu-Val* stabileşte şi relaţia:

$$\operatorname{cot} x_1+\operatorname{cot} x_2+\operatorname{cot} x_3=\frac{\pi}{4}$$

Generalizare dată de d-l Angelescu N. Traian (lic. Giurgiu).

Dacă $x_1, x_2, \ldots x_m$ *sunt rădăcinele ecuaţiei:*

$$x^m+[(a_1+a_2)-(a_3+a_4)+\ldots\pm(a_{m-2}+a_{m-1})-1]x^{m-1}+a_1x^{m-2}+\ldots+a_{m-2}x+a_{m-1}=0$$

atunci avem:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1+\operatorname{arc\,tg} x_2+\ldots+\operatorname{arc\,tg} x_m=\frac{\pi}{4}$$

m impar.

In adevăr luând tangenta ambilor membri ai acestei relaţii avem:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_m-\Sigma x_1x_2x_3+\Sigma x_1x_2x_3x_4x_5-\ldots}{1-\Sigma x_1x_2+\Sigma x_1x_2x_3x_4-\ldots}=1$$

Folosind relaţiile între rădăcini şi coeficienţii ecuaţiei date, primul membru devine:

$$\frac{-(a_1+a_2)+(a_3+a_4)-\ldots\mp(a_{m-2}+a_{m-1})+1-a_2+a_4-\ldots\mp a_{m-1}}{1-a_1+a_3-a_5+\ldots\mp a_{m-1}}=\frac{1-a_1+a_3-a_5+\ldots}{1-a_1+a_3-a_5+\ldots}=1,$$

și deci relația dată este stabilită.

Au dat generalizări analoage, d-nii: *Obreja Iancu* și *Popovici Ioan.*

PROBLEME PROPUSE

352. — La numerotarea pietrelor kilometrice dintre două localități s'au întrebuințat 8153 caractere. Știind că numerotarea începe dela 1, se cere distanța între cele două localitați.

SUBLOCOT. I. M. IONITA

353.—Să se găsească un cub perfect de patru cifre astfei ca prima cifră să fie diferența între cifra a treia și a patra, numărul format de primele două cifre să fie multiplu ultimei cifre și suma cifrelor cubului cerut să fie un număr prim.

I. GEORGESCU

354. — Să se verifice identitatea:

$$\frac{2ac\sqrt[3]{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b}=\sqrt[3]{3abc-b^3-\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}}$$

V. ALACI

355. — Să se verifice identitatea:

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & 4ab & 2b^2 & 3a^2 & 3ab & 3b^2 \\ 2b^2 & 2a^2 & 4ab & 3b^2 & 3a^2 & 3ab \\ 4ab & 2b^2 & 2a^2 & 3ab & 3b^2 & 3a^2 \\ a^2 & 2ab & b^2 & 2a^2 & 2ab & 2b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab & 2b^2 & 2a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 & 2ab & 2b^2 & 2a^2 \end{vmatrix} = (a^6-b^6)^2$$

N. BOTEA.

356. — Se dă un cerc C și o secantă AS — punctele A și S pe cerc. Un punct P în planul cercului. Dacă M este punctul unde SP taie din nou cercul, se cere locul lui M când centrul cercului C se plimbă pe dreapta AC. și cercul trece prin A.

ION PROTOPOPESCU

357. — Luăm un cerc de diametru AE. Descrim apoi cercuri tangente interioare cercului dat în E, și a căror rază descrește în progresie geometrică cu rația $\frac{2}{3}$. Raza primului cerc descris fiind $\frac{2R}{3}$ Din punctele A, B etc. unde cercurile descrise taie diametru AE, ducem tangente la aceste cercuri.

1. Să se demonstreze că punctele unde tangentele ating cercurile, sunt în linie dreaptă cu punctul E.

2. Să se calculeze suma ariilor cuprinse între aceste tangente, linia care unește toate punctele de tangență și arcurile respective cuprinse între diametru AE și linia care unește punctele de tangență.

A. STAMBULEANU

358. — Să se demonstreze că în orice triunghiul avem:

$$h_a+h_b+h_c>6r,$$

notațiile fiind cele obicinuite.

I. MILNER

359. — Două plane înclinate fiind în prelungire sunt reprezentate prin liniile de cea mare pantă AB și BC, care fac respectiv cu orizontala AX unghiurile α și β. Pe fiecare din aceste planuri se găsește câte un punct material M_1 și M_2 de greutate g_1 și g_2 având coeficienții de frecare f_1 și f_2. Punctele sunt legate invariabil printr'un fir inextensibil și de greutate neglijabilă. Să se găsească condițiile de echilibru.

HORATIU GH. HRISTEA

INFORMATIUNI

A aprrut Culegere de Exerciţii şi Probleme de Algcbră Elementară, partea I, de I. Dumitriu, profesor Arad. Numărul mare de exerciţii şi diversitatea lor poate fi de mare folos tuturor celor ce vor să câştige îndemânarca calcului algebric.

Comenzile se pot face la R. M. T. în schimbul a 40 lei.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe brobleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când soscsc la redacţic se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe ïoi ele trebuesc prinse la un loc. Figurile ase menea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noşrti corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

In ultimul timp s'au primit soluţiuni la următoarele probleme, dela d-nii:

247. — *Popovici C. C-tin.*

268. — *Lăzărescu M. Vasile, Miu M. Ion, Raubach Arthur* şi *Ţântăreanu P.*

287. — *Beldie N. D-tru, Braieşter Otto, Florescu M. Octavian, Miu M. Ion, Popovici C. C-tin* şi *Tărăbuţă C. Paul.*

312. — *Beldie N. D-tru, Constantinescu Gr. Ion, Cormanschi I., David I. Ioan, Epure Ştefan, Florea C. Alexandru, Lepădatu I. Victor, Mihăilescu Romeo, Milner I., Percea Viorel, Popovici C-tin, Rătescu Maria, Samoilă D-tru, Silion Gh. Ion, Simionescu D. Gh., Tărăbuţă C. Paul* şi *Weiss Rolomon.*

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 IULIE 1924. No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. TIBERIU POPOVICI. RELATIUNI INTRE UNGHIURILE UNUI TRIUNGHIU.
2. NOTE MATEMATICE, 10, 11.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 284, 293, 297, 302, 320
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile roblemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Marte

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

RELAȚIUNI INTRE UNGHIURILE UNUI TRIUNGHIU

de TIBERIU POPOVICI
Liceul Arad

In articolul de față voi încerca să stabilesc câteva relațiuni între unghiurile unui triunghiu, cu ajutorul câtorva identități algebrice.

1. Să considerăm identitățile:

$$(a+b)(a+c)-a^2\equiv(b+c)(b+a)-b^2\equiv(c+a)(c+b)-c^2$$

unde a, b, c reprezintă trei cantități oarecare.

Dacă în această identitate facem $a=\sin 2A$; $b=\sin 2B$; $c=\sin 2C$; A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, ea devine:

$$(\sin 2A+\sin 2B)(\sin 2A+\sin 2C)-\sin^2 2A\equiv\ldots$$
$$(\sin 2B+\sin 2C)(\sin 2B+\sin 2A)-\sin^2 2B\equiv$$
$$(\sin 2C+\sin 2A)(\sin 2C+\sin 2B)-\sin^2 2C.$$

Inlocuind sumele prin produse, exprimând sinusurile arcelor duble în simple, și simplificând cu 4 obținem identitățile:

$$\sin(A+B)\sin(A+C)\cos(A-B)\cos(A-C)$$
$$-\sin^2 A\cos^2 A\equiv..$$

însă $\sin(A+B)=\sin C$, $\sin(A+C)=\sin B\ldots$ etc. iar $\cos^2 A=1-\sin^2 A$, deci în definitiv obținem identitățile:

$$\sin B\sin C\cos(A-B)\cos(A-C)+\sin^4 A\equiv$$
$$\sin C\sin A\cos(B-A)\cos(B-C)+\sin^4 B\equiv$$
$$\sin A\sin B\cos(C-A)\cos(C-B)+\sin^4 C.$$

2. Să considerăm identitatea:

$$(a+c)(b+c)(a-b)+(b+a)(c+a)(b-c)+$$
$$(c+b)(b+a)(c-a)\equiv(a-b)(b-c)(a-c)$$

Dacă punem $a=\operatorname{tg}A$, $b=\operatorname{tg}B$, $c=\operatorname{tg}C$ și transformăm diferențele și sumele, identitatea devine:

$$\sum\frac{\sin(A+C)\sin(B+C)\sin(A-B)}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$
$$=\frac{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$$

sau, punând $\sin(A+C)=\sin B$, $\sin(B+C)=\sin A$, etc. și înmulțind ambii membri cu $\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C$, avem identitatea:

$$\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)+$$
$$\sin C\sin A\sin(C-A)\equiv\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)$$

3. Să considerăm identitatea:

$$(b+1)(c+1)(b-c)+(a+1)(c+1)(c-a)+$$
$$(b+1)(a+1)(a-b)\equiv(a-b)(b-c)(c-a).$$

Dacă în această identitate facem $a=\operatorname{tg}^2 A$, $b=\operatorname{tg}^2 B$, $c=\operatorname{tg}^2 C$, avem:

$$a+1=\operatorname{tg}^2 A+1=\frac{1}{\cos^2 A}=\sec^2 A\ldots\text{ etc.}$$

și

$$(a-b)=\operatorname{tg}^2 A-\operatorname{tg}^2 B=(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B)(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)$$
$$=\frac{\sin C\sin(A-B)}{\cos^2 A\cos^2 B},$$

iar identitatea devine:

$$\sum\sin A\sin(B-C)\sec^4 B\sec^4 C\equiv$$
$$\frac{\sin A\sin B\sin C\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}{\cos^4 A\cos^4 B\cos^4 C}$$

sau înmulțind cu $\cos^4 A \cos^6 B \cos^4 C$ avem identitatea :

$$\sin A \cos^4 A \sin (B - C) + \sin B \cos^4 B \sin (C - A) + \sin C \cos^4 C \sin (A - B) \equiv \sin A \sin B \sin C \sin (A - B) \sin (B - C) \sin (C - A)$$

4. Dacă luăm identitatea ;

$$(a + b + c)(a x^2 + b y^2 + c z^2) - b c (y - z)^2 - c a (z - x)^2 - a b (x - y)^2 \equiv (a x + b y + c z)^2,$$

și facem $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$, $c = \operatorname{tg} C$, $x = \operatorname{cotg} A$, $y = \operatorname{cotg} B$, $z = \operatorname{cotg} C$ ea devine, observând că $\operatorname{tg} A \operatorname{cotg} A = 1 \ldots$ etc.

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) - \Sigma \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C (\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C)^2 \equiv 9$$

însă : $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \equiv \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C \equiv \dfrac{1}{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C}$

și $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C (\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C)^2 \equiv \dfrac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} \cdot \dfrac{\sin^2 (C - B)}{\sin^2 B \sin^2 C} \equiv \dfrac{4 \sin^2 (C - B)}{\sin 2B \sin 2C}$,

prin urmare identitatea devine :

$$\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C} - \frac{4 \sin^2 (C - B)}{\sin 2B \sin 2C} - \frac{4 \sin^2 (A - C)}{\sin 2A \sin 2C} - \frac{4 \sin^2 (B - A)}{\sin 2A \sin 2B} \equiv 9.$$

5. Dacă în identitatea :

$$x (y + z)^2 + y (z + x)^2 + z (x + y)^2 = (x + y)(y + z)(z + x) + 4 x y z,$$

facem $x = \operatorname{tg} A$, $y = \operatorname{tg} B$, $z = \operatorname{tg} C$ avem :

$$x (y + z)^2 = \frac{\sin^3 A}{\cos A \cos^2 B \cos^2 C} \ldots \text{ etc.}$$

deci identitatea se scrie.

$$\Sigma \frac{\sin^3 A \cos A}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \equiv \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} + \frac{4 \sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C}$$

și înmulțind ambii membri cu $\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C$ și punând $2 \sin A \cos A = \sin 2A \ldots$ etc. ; avem identitatea : $\sin^3 A \cos A + \sin^3 B \cos B + \sin^3 C \cos C - \sin A \sin B \sin C \equiv \dfrac{1}{2} \sin 2A \sin 2B \sin 2C$, care se mai poate scrie și astfel :

$$\sin 2A \sin^2 A + \sin 2B \sin^2 B + \sin 2C \sin^2 C - 2 \sin A \sin B \sin C \equiv \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

6. Să considerăm identitatea lui *Lagrange :*

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (x a + y b + z c)^2 \equiv (x b - y a)^2 + (y c - z b)^2 + (c x - a z)^2,$$

facem : $x = \sin A$, $y = \sin B$, $z = \sin C$: $a = \cos A$, $b = \cos B$, $c = \cos C$, observând că :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

și că : $(x b - y a)^2 = (\sin A \cos B - \sin B \cos A)^2 = \sin^2 (A - B)$ obținem identitatea :

$$4 - 4 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C - \frac{(\sin 2A + \sin B 2 + \sin 2C)^2}{4} \equiv \sum \sin^2 (A - B)$$

Însă : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$, deci avem îndefinitiv identitatea :

$$4 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C + 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \equiv 4 - \sin^2 (A - B) - \sin^2 (B - C) - \sin^2 (C - A)$$

7. Dacă în identitatea ;

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a + b)(b + c)(a + c)} - 2 a b c + \frac{c^2 a^2}{a + c} + \frac{b^2 a^2}{a + b} + \frac{b^2 c^2}{b + c} \equiv - \frac{(a b + b c + a c)^3}{(a + b)(b + c)(c + a)},$$

facem $a = \operatorname{cotg} A$, $b = \operatorname{cotg} B$, $c = \operatorname{cotg} C$, avem :

$$(a + b)(b + c)(a + c) = \frac{1}{\sin A \sin B \sin B}$$

$$a b + a c + b c = 1$$

și $\dfrac{c^2 a^2}{c + a} = \dfrac{\cos^2 C \cos^2 A}{\sin^2 C \sin^2 A} \cdot \dfrac{\sin C \sin A}{\sin B} = \dfrac{\cos C \cos A \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A}{\sin B}$,

iar identitatea devine:

$$\frac{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}{\sin A \sin B \sin C} - 2\frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} +$$

$$\sin A \sin B \sin C \equiv -\sum \frac{\cos C \cos A \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C}{\sin B}$$

Observând însă că:

$$\sum \frac{\cos C \cos A \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} C}{\sin B} = \sum \frac{\cos^2 A \cos^2 C}{\sin A \sin B \sin C}$$

Identitatea se mai poate scrie și sub forma:

$$2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C$$

$$- \sin^2 A \sin^2 C \sin^2 B \equiv \cos^2 A \cos^2 C$$

$$+ \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 A \cos^2 B.$$

***

Inainte de a încheia acest articol voi stabili și vreo două inegalități cu ajutorul identităților algebrice.

1. Fie inegalitatea evidentă.

$$\frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+b}{c} \geqq 6,$$

dacă facem $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$, $c = \operatorname{tg} C$, avem:

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos B}{\cos A \cos C} \ldots \text{ etc.}$$

deci:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geqq 6 \cos A \cos B \cos C.$$

Fie inegalitatea:

$$\frac{a+b}{a} + \frac{b+c}{b} + \frac{c+a}{c} + \frac{a+b}{b} + \frac{b+c}{c} + \frac{c+a}{a} \geqq 12.$$

Dacă facem $a = \sin 2A$, $b = \sin 2B$, $c = \sin 2C$, avem:

$$\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{(\sin 2A + \sin 2B)^2}{\sin 2A \sin 2B}$$

$$= \frac{4 \sin^2 C \cos^2 (A-B)}{\sin 2A \sin 2B},$$

iar inegalitatea devine:

$$\sin^3 C \cos C \cos^2 (A-B) + \sin^3 B \cos B \cos^2 (C-A)$$

$$+ \sin^3 A \cos A \cos^2 (B-C) \geqq \frac{3}{2} \sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

In ambele cazuri egalitatea subsistă, când triunghiul este echilateral.

NOTE MATEMATICE

10. — *Asupra problemei No. 330.* In această problemă se arată că: *dacă a este un număr prim mai mare ca 3, expresia:*

$$E = a^{2n+6} - a^{2n} - a^6 + 1$$

este divizibilă cu 144 (sau dacă $a \neq 7$, chiar cu 1008).

In cele ce urmează îmi propun să arăt că expresiunea se divide cu 432, sau cu 3024 (când $a \neq 7$).

In adevăr:

$$E = (a^6 - 1)\ (a^{2n} - 1).$$

Dar factorul $(a^6 - 1)$ se mai poate scrie:

$$a^6 - 1 = (a-1)\ (a^2 + a + 1)\ (a+1)\ (a^2 - a + 1)$$

$$\text{I} \qquad \text{II} \qquad \text{III} \qquad \text{IV}$$

Ori, dacă a este de forma $M3 - 1$ factorii III și IV sunt fiecare $M3$; dacă a este de forma $(M3 + 1)$, factorii I și II sunt divizibili fiecare cu 3, deci oricum:

$$a^6 - 1 = M3^2.$$

Și cu aceasta:

$$E = M3^3 . 2^4 = 432.$$

Când $a \neq 7$, avem și $E = M7$.

De asemenea dacă $a \neq 5$ și n este par, atunci: $E = M5$ etc.

CAP. I. LINTES

11. — *Transformarea formulei combinărilor.* In cele ce urmează îmi propun să arăt că formula $\frac{A_m^n}{n!}$, care ne dă numărul combinărilor a m obiecte luate câte n, se poate pune sub formă de sumă, nu de cât de produse cum e aceasta. Intr'adevăr să luăm de exemplu șase obiecte distincte: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, și să formăm combinările acestor obiecte luate câte două, tabloul următor ne va da lesne numărul lor:

$$a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ a_1 a_4,\ a_1 a_5,\ a_1 a_6$$

$$a_2 a_3,\ a_2 a_4,\ a_2 a_5,\ a_2 a_6$$

$$a_3 a_4,\ a_3 a_5,\ a_3 a_6$$

$$a_4 a_5,\ a_4 a_6$$

$$a_5 a_6$$

Numărând grupele după linii observăm că avem: $5+4+3+2+1$ grupe. Deci vom putea scrie $C_6^2 = \frac{6\times5}{1\times2} = 5+4+3+2+1$ sau în general

(1) $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1\times2} = \sum_{k=1}^{m=1} k$, identitate care se verifică ușor însumând termenii progresiunii: $1+2+3+\ldots+(m-1)$. Numărul combinărilor acestor obiecte, luate câte trei e dat de tabloul:

$$\begin{array}{llll} a_1a_2a_3, & a_1a_2a_4, & a_1a_2a_5, & a_1a_2a_6 \\ & a_1a_3a_4, & a_1a_3a_5, & a_1a_3a_6 \\ & & a_1a_4a_5, & a_1a_4a_6 \\ & & & a_1a_5a_6 \\ a_2a_3a_4, & a_2a_3a_5, & a_2a_3a_6 & \\ & a_2a_4a_5, & a_2a_4a_6 & \\ & & a_2a_5a_6 & \\ a_3a_4a_5 & a_3a_4a_6 & & \\ & a_3a_5a_6 & & \\ & a_4a_5a_6 & & \end{array}$$

adică: $(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1 = 1\times4+2\times3+3\times2+4\times1 = C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} = 20$,

sau în general (2) $C_m^3 = \sum_{k=1}^{m-2} k(m-k-1)$.

Procedând la fel găsim:

(3) $$C_m^4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times2\times3\times4} = \sum_{k=1}^{m-3} \frac{k(m-k-1)(m-k-2)}{2}$$

Intrebuințând aceiași cale găsim în general:

$$C_m^n = \sum_{k=1}^{m-n-1} \frac{k(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-k-n+2}{(n-2)!}$$

De altfel din această ultimă formulă putem afla pe toate celelalte pentru: $n = 1, 2, 3 \ldots n$.

Vedem dar că pornind dela însuși modul de formare a combinărilor, putem afla identități, care ne permit a transforma formula cunoscută pentru C_m^n într'o sumă.

DAVID GHEORGHE

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen de fine de an

Proba scrisa de Geometrie Analitica, anul I

9 Iunie 1924

I. Se dă o elipsă cu focarele în F și F'. Fie D piciorul directoarei focarului F pe axa F F' și P un punct în plan. Tangentele PM și PM' la elipsă întâlnesc directoarea respectiv în T și T'. Se cere: *a)* Locul lui P pentru care mijlocul segmentului T T' este punctul D, *b)* Locul lui P pentru care unghiul T F T' este drept. *c)* Să se discute locul dela *b*), să i se găsească focarele, directoarele și excentricitatea. *d)* In cazul când locul dela *b*) este o hiperbolă, să se găsească locul proecțiilor lui F pe asimptotele acelei hiperbole.

II. Se cere locul punctelor M ale căror distanțe la un punct dat (x_0, y_0, z_0) și la planul

$$lx+my+nz+p=0$$

au un raport constant și egal cu $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$. Să se discute natura locului.

(Timpul acordat $3^1/_2$ ore).

Lucrare scrisa de Analiza, anul I

23 Iunie 1924

1. Să se calculeze aria comună curbelor.

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-2y=0 \\ y^2=4x \end{cases}$$

2. Să se verifice că expresiunea:

$$\left[\frac{y}{y^2+(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x+1}{y^2+(x+1)^2}\right]dy,$$

este o diferențială totală exactă, și în urmă să se calculeze funcțiunea din care ea provine.

3. Se dă ecuația diferențială:

$$(x-1)^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2(x-1)^3(x+2)\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

Să se efectueze schimbarea de variabilă;

$$x = \frac{t+1}{t-1}$$

și în urmă să se integreze complect ecuația diferențială dată.

(Timpul acordat 3 ore)

Examenul oral de Geometrie Analitica

9, 10 şi 11 Iunie 1924

1. — Să se studieze secţiunile ciclice ale elipsoidului.

2. — Perimetrul unui dreptunghiu OABC este constant. Să se arate că perpendiculara din C pe diagonala AB trece prin un punct fix când OA şi OB rămân fixe ca direcţie.

3. — Fie ABC, A′B′C′ două triunghiuri aşa ca AA′, BB′, CC′ să fie concurente. Fie M intersecţia lui BC cu B′C′ şi N intersecţia lui AC cu A′C′. Să se demonstreze că MN rămâne paralelă cu ea însăşi când vârfurile celor 2 triunghiuri se mişcă pe dreptele fixe AA′, BB′, CC′.

4. — Se dau cercurile de centre C şi C′. Din un punct M al cercului C se duce tangenta MA la cercul C′ şi perpendiculara MD pe un diametru al acestui cerc. Să se demonstreze că:

$$\overline{MA}^2 = 2\,CC'.MD.$$

5. — Să se găsească locul punctelor de tangenţă pentru care tangenta la conica

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - a^2} - 1 = 0.$$

are o direcţie dată.

6. — Să se construiască conica

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

7. — Să se discute ecuaţia generală de gradul II cu 3 variabile.

8. — Locul vârfurilor conicei

$$y^2 - 2px + \lambda x^2 = 0$$

când λ variază.

9. — Se cere ecuaţia patratică a axelor unei conice.

10. — Să se demonstreze că directoarea unui focar este perpendiculară pe axa focală.

11. — Locul punctelor ale căror distanţe la 2 puncte fixe este constantă.

12. — Se dau punctele A, B, C, D şi se cere locul unui punct M în plan ştiind că suma suprafeţelor MAB, MCD este egală cu suma suprafeţelor MAD şi MBC.

13. — Se cere ecuaţia cercului cu centrul în (—2, 4) şi tangent cercului

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

14. — Să se găsească ecuaţiile care dau focarele la o conică.

15. — Să se arate că prin un punct de pe hiperboloid trec 2 generatoare de genuri diferite.

16. — Se cere locul polului unei tangente la un cerc O faţă de un cerc O′.

17. — Să se arate că din focarele unei conice se pot duce 2 tangente izotrope la acea conică.

18. — Să se găsească unghiul a 2 drepte în plan.

19. — Să se calculeze volumul tetraedrului, cunoscând coordonatele vârfurilor.

20. — Să se raporteze elipsa la 2 diametri conjugaţi.

21. — Să se construiască o hiperbolă cunoscând un punct şi asimptotele

22. — Să se discute ecuaţia

$$x^2 - 2\lambda xy + 4y^2 + 2\lambda x - \lambda y = 0.$$

23. — Ştiind că ecuaţia de gradul II se reduce la

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 z^2 + \frac{\Delta}{\vartheta} = 0$$

să se arate felul suprafeţei după diferitele cazuri ce se pot prezenta.

24. — Pe o dreaptă Δ paralelă cu axa mare a unei elipse se mişcă un segment constant AB. Se cere intersecţia tangentelor duse din A şi B la elipsă.

25. — Se dă o dreaptă Δ şi un punct fix O. Una din laturile unui unghiu constant θ întâlneşte pe Δ în A. Pe cealaltă latură se ia un punct B aşa fel în cât

$$OA.OB = K^2.$$

Se cere locul lui B când A se mişcă pe Δ.

26. — Să se afle ecuaţia patratică a axelor unei conice.

27. — Vârfurile unui triunghiu de suprafaţă constantă se mişcă pe 3 axe rectangulare fixe, Ox, Oy, Oz. Se cere locul proecţiei lui O pe planul acestui triunghiu.

28. — Se dă o dreaptă Δ, un punct A şi un cerc O. Fie B un punct mobil pe Δ. Se cere locul intersecţiei secantei AB cu polara lui B faţă de cerc.

29. — Condiţiile ca o dreaptă să aibă un pol. Cum se găseşte acest pol?

30. — Locul vârfurilor unui unghiu constant circumscris unei parabole.

31 — Din punctul de întâlnire al dreptelor

$$cy + ax + a^2 = 0$$
$$cy + bx + b^2 = 0$$

să se ducă o perpendiculară pe dreapta

$$bx + ay - ab = 0.$$

32. — Să se discute curba

$$(ax + by + c)^2 - (a'x + b'y + c')^2 = k^2$$

33. — Un triunghiu ABC are baza AB fixă şi suma BC + CA constantă. Locul centrului cercului înscris acestui triunghiu.

34. — Locul centrelor cercurilor văzute din 2 puncte date sub unghiuri constante.

35. — Punctele A şi B se mişcă pe 2 drepte concurente în O aşa fel că

$$OA.AB.BO = K^2.$$

Să se arate că AB rămâne tangentă la un cerc.

36. — Problema dela 25 în care se înlocueşte dreapta Δ prin un cerc.

37. — Să se raporteze hiperbola la asimptote.

38. — Intre axele şi 2 diametri conjugaţi ai elipsei există relaţiunea

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

39. — Ecuaţia generală a unei conice raportată la o tangentă şi o normală.

40. — Locul centrelor conicelor

$$\lambda x^2 + \beta x y + (\lambda - \alpha) y^2 - (\lambda\alpha + R^2) x - \lambda\beta y + \alpha R^2 = 0.$$

Să se separe locul corespunzător fiecărui gen de conică.

41. — Locul vârfurilor conicelor

$$x^2 - 2\lambda x y + y^2 - 2\lambda x = 0.$$

42. — O secantă taie hiperbola în M şi asimptotele sale în A şi B. Să se arate că M A . M B este constant.

43. — Să se construiască conica

$$(3x - 3y + 1)^2 - (x + y)^2 - 1 = 0$$

44. — Condiţia ca ecuaţia de gradul II să reprezinte un cerc.

45. — Podara focarului unei parabole.

46. — Ecuaţia perpendicularei comune la 2 drepte.

47. — Lungimea perpendicularei comune între 2 drepte.

48. — Ecuaţia patratică a axelor unei conice.

49. — Să se discute

$$x^2 - 2\lambda^3 x y + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

50. — Dreptele care unesc mijloacele muchilor opuse a unui tetraedru sunt concurente.

51. — Unghiul a 2 plane.

52. — Să se construiască o parabolă cunoscând un punct, tangenta în acest punct, direcţia axei şi parametrul.

53. — Să se găsească locul mijloacelor coardelor care trec prin un punct fix, la o cuadrică.

54. — Ecuaţia generală a parabolelor care trec prin 2 puncte date şi ale căror diametri au o direcţie dată.

55. — Locul centrelor dreptunghiurilor circumscrise unui patrulater.

56. — Se dă punctele A, B, C, D şi se cere locul punctului M pentru care suma suprafeţelor M A B, M C D este constantă.

57. — Să se găsească ecuaţia tangentelor duse din un punct la o conică.

58. — Să se demonstreze că dacă o dreaptă Δ trece prin un punct fix, polul ei faţă de o conică se mişcă pe o dreaptă şi reciproc.

59. — Să se discute.

$$x^2 - 2\lambda x y + 4 y^2 + 2x - \lambda y = 0.$$

60. — Locul punctelor de unde se pot duce la o parabolă tangente egal înclinate pe o dreaptă dată.

61. — Se dă un cerc O, un punct A şi o dreaptă Δ. O dreaptă oarecare trece prin A, taie pe Δ în D şi pe O în B şi C. Se cere locul conjugatului armonic a lui D faţă de B C.

62. — Locul centrelor conicelor ce trec prin 4 puncte date.

63. — Plane diametrale şi diamtri la o cuadrică.

64. — Să se construiască

$$x^2 - 2xy + y^2 + 6y - 2y - 4 = 0$$

65. — Să se discute:

$$x^2 - 4xy + y^2 + \lambda x - 4y - \lambda = 0.$$

66. — Ecuaţia tangentei în un punct la o curbă în spaţiu.

67. — Ecuaţia dreptei trecând prin 2 puncte în spaţiu.

68. — Locul mijloacelor coardelor care trec prin un punct fix la o conică.

69. — Să se discute

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 6y + \lambda = 0.$$

70. — Locul unui punct M ale cărei distanţe la laturile unui poligon au o sumă constantă.

71. — Locul mijlocului unei drepte de lungime constantă ale cărei extremităţi se sprijină pe 2 drepte dreptunghiulare care nu se întâlnesc.

72 — Să se calculeze suprafaţa elipsei.

73. — Să se demonstreze că între 2 diametri conjugaţi şi axele unei elipse avem relaţiunile

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \text{ şi } a'b' \sin\theta = ab$$

74. — Produsul distanţelor focarelor unei elipse la o tangentă la elipsă, este egal cu patratul diametrului conjugat celui ce duce la punctul de contact.

75. — Tangenta la o parabolă este bisectoarea unghiului format de direcţia axei şi a tangentei la vârf.

76. — Dreptele care unesc focarele unei elipse cu un punct din plan sunt egal înclinate pe tangentele duse din acel punct la elipsă.

77. — Prin o dreaptă Δ să se ducă un plan paralel cu o altă dreaptă Δ'.

78. — Să se discute

$$a yz + b zx + c xy + d = 0.$$

79. — Condiţiile ca o ecuaţie de gradul II să reprezinte o suprafaţă de revoluţie.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXIX, No. 10, Iunie 1924. † *Niculae Nicolescu*, de *N. I. Georgescu*.

Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" de *G. Ţiţeica*. O proprietate funcţională comună cercului şi spiralei logaritmice, de *A. Angelescu*. O problemă de aritmetică, de *Wilhelm I. Solomon*.

2. *Foaia Matematică*, an. I, No. 6, Iunie 1924. Asupra unei teoreme a lui *Césaro*, de *B. M. Barbalatt*.

3. *Jurnal Matematic*, vol. I, No. 12, 15 Iunie 1924. Către cititori, de *T. P.* Teoreme asupra poligoanelor regulate, de *T. P.*

PROBLEME REZOLVATE

284 — *Să se demonstreze că în orice triunghiu există relaţiunea :*

$$\frac{8s^3}{h_a h_b h_c} = \frac{r_a r_b r_c (r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

notaţiunile fiind cele obicinuite.

UDRISKY TRAIAN

In virtutea relaţiilor cunoscute :

$h_a = \frac{2s}{a}$, $h_b = \frac{2s}{b}$, $h_c = \frac{2s}{c}$, primul membru devine :

$$(1) \qquad \frac{8s^3}{h_a h_b h_c} = \frac{8s^3}{\frac{2s}{a}\cdot\frac{2s}{b}\cdot\frac{2s}{c}} = abc.$$

In virtutea relaţiilor cunoscute :

$$r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad r_c = \frac{s}{p-c},\quad r = \frac{s}{p}.$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = s^2.$$

al 2-lea membru al relaţiei date, devine succesiv :

$$(2) \qquad \frac{r_a r_b r_c (r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\frac{s}{p-a}\cdot\frac{s}{p-b}\cdot\frac{s}{p-c}\left(\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{p-b}-\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{p-c}-\frac{s}{p}\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{s^6 \cdot abc}{[p(p-a)(p-b)p-c)]^3} = \frac{s^6 \cdot abc}{s^6} = abc.$$

Ultimii membri ai relaţiilor (1) şi (2) fiind egali, rezultă :

$$\frac{8s^3}{h_a h_b h_c} = \frac{r_a r_b r_c (r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

adică tocmai relaţia cerută

Soluţie dată de d-nii : *Alboi Nistor* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Alexandrescu A. N.* [Ploeşti], *Angelescu N. Traian* lic. Giurgiu], *Apătean Camil* [lic. Arad], *Arcadian N.* [lic. Caracal], *Atanasiu I. Dumitru* [lic Huşi], *Bălean G.* [lic Timişoara], *Bârglăzan N. Aurel* [Şc. Polit., Timişoara], *Beju O. Traian* [lic. Arad], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bercovici A. Emil* [student], *Berdan Gh.* [lic. Bârlad], *Berardo Bernardis* [lic. R.-Sărat], *Blumenfeld D.* [lic. Botoşani], *Bocancea I. Kirilă* [lic. Tg.-Mureş], *Boju Şt. Rosetel* [lic. Timişoara], *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Calmanovici Savu* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Ciută G.* [Şc. Polit., Timişoara], *Coşniţă Virgil* [lic. Bârlad], *Constantinescu N. Nicolae* [Seminarul Pedagogic, Bucureşti], *Cocorandu M.* [Şc. Polit. Timişoara], *Costăchescu N. Ionel* [Brăila], *Cretoiu A.* [Bucureşti], *Cristea Aurel* [lic. Focşani], *Critz D. M.* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *David Gheorghe* [lic. Timişoara], *Dumitrescu Gh. Marin* [Slatina-Olt], *Epure D. Ştefan* [Buzău], *Flickstein I.* [student, Cernăuţi], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iaşi], *Gabrielescu C. Vasile* [lic. Brăila], *Gârlişteanu Mihail* [lic. Timişoara], *Georgescu C. Ioan* [lic. Piteşti], *I. N. Georgescu-Val* [Giurgiu], *Ghimicescu I. Gheorghe* [lic. Internat, Iaşi], *Goldstein L. M.* [Seminarul Pedag., Bucureşti], *Gradin I. Gheorghe* [lic. Câmpina], *Grigorescu L. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Grofşoreanu I. Gheorghe* [lic. Arad], *Gulian Emil* [lic. Giurgiu], *Hartular Gheorghe* [lic. Internat, Iaşi], *Herşcovici Emanoil* [lic. Galaţi], *Hotăran Teodor, Ianculescu Octavian* [Şc. Indus. Timişoara], *Iliescu Şt. Dima* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *Ionescu Paul* [lic. M-rea Dealu], *Katz Pincu* [lic. Galaţi], *Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Vlaţiu Laurenţiu* [lic. Constanţa], *Lăzărescu M. Vasile* [Giurgiu], *Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iaşi], *Manafu Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Marian Solomon* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Marinescu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Marinescu Traian* [lic. Giurgiu], *Mihailescu Romeo* [lic. R.-Vâlcea], *Milner I.* [Şc. Polit. Timişoara], *Mironovici Virginia* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Mitran Şt. Grigore* [lic. Craiova], *Moroianu At.* [lic. Constanţa], *Musta Şt.* [Timişoara], *Nicolau C.* [lic. R.-Sărat], *Panaitescu I. Al.* [lic. Piteşti], *Pârvulescu Titus* [lic. M-rea Dealu], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Percea Viorel* [lic. Timişoara], *Popea Ovidiu* [Chişinău], *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Propst A. Jean* [Şc. Polit. Timişoara], *Rauchbach Arthur* [lic. Gura Humorului] *Răduleţ B. Remus* [Şc. Polit. Timişoara], *Rosu Alexandru* [lic. M-rea Dealu], *Samoilă Dumitru* [lic. Câmpina], *Şerban I. Tiberiu, Silion Gh. Ion* [lic. Braşov], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Smigelschi Octavian* [Şc. Polit. Timişoara], *Spacu Gh. Petru, Spârchez Zeno* [lic. Braşov], *Solacolu C. Şerban* [lic. Matei Basarab, Bucureşti], *Şuşelescu Ion*]lic. M-rea Dealu], *Stamatescu I. Valeriu* [Seminarul Pedagogic, Bucureşti], *Stamatiu Mihail* [Piteşti], *Stambuleanu A.* [Şc. Polit., Timişoara], *Stănescu A. Nicolae* [Şc. Polit. Timişoara], *Stănciulescu A. George* [Piteşti], *Stănculescu I. C-tin* [lic. Giurgiu], *Stefănescu Emil* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Tauber Alexandru* [lic. Botoşani], *Tăraş Vasile* [lic. Braşov], *Tără-*

buță C. Paul [lic. Mihai-Viteazul, București], *Teodorescu M. D-tru* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Teodorescu C. M.* [Șc. Polit., Timișoara], *Tomescu Gheorghe* [șc. de Artilerie], *Vasilescu A. Mircea* [lic. Giurgiu], *Vasiliu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Vătășan G. Ovid* [Șc. Polit. Timișoara], *Vlăduțu Sabin* [lic. M-rea Dealu], *Weiss Solomon* [lic. Galați], *Wetter Anna* [lic. Câmpulung, Bucovina] și *Zoican A.*

293. — *Dintr'un număr se scade altul și se obține un al treilea. Dacă tot din acel număr se scade înzecitul celui de al doilea, se obține răsturnatul celui de al treilea. Să se găsească acele numere, știind ca primul este de două cifre.*

EMIL STEFANESCU

Fie $10a+b$ și c numerile cerute. Evident că c este de o singură cifră căci altfel am avea $10c \geqq 100$ și nu s'ar putea scădea din $10a+b$. Observăm însă că $c \leqq a$, căci altfel $10c$ nu s'ar putea scădea din $10a+b$. Conform enunțului avem:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 10a+b-c &= 10\alpha+\beta \\ 10a+b-10c &= 10\beta+\alpha \end{aligned}$$

$10\alpha+\beta$ este și el un număr de două cifre. Scăzând a doua relație din prima, găsim:

$$9c = 9\alpha - 9\beta \quad \text{sau:} \quad (2)\quad c = \alpha - \beta$$

Inlocuind această valoare a lui c în una din relațiile (1), avem:

$$10a+b-\alpha+\beta = 10\alpha+\beta$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad 10a+b = 11\alpha.$$

Numărul de două cifre $10a+b$ este deci multiplu de 11, adică: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 și știm încă că, $c \leqq a$.

Dacă luăm deci:

$$10a+b = \begin{cases} 11, \text{ avem } c=1 \\ 22, \quad \text{„} \quad c=1,2 \\ 33, \quad \text{„} \quad c=1,2,3 \\ 44, \quad \text{„} \quad c=1,2,3,4 \\ 55, \quad \text{„} \quad c=1,2,3,4,5 \\ 66, \quad \text{„} \quad c=1,2,3,4,5,6 \\ 77, \quad \text{„} \quad c=1,2,3,4,5,6,7 \\ 88, \quad \text{„} \quad c=1,2,3,4,5,6,7,8 \\ 99 \quad \text{„} \quad c=1,2,3,4,5,6,7,8,9. \end{cases}$$

In total avem 45 soluții. Dacă am admite că scăzătorul ar putea fi și zero, am avea încă 9 soluții, în total 54.

Soluții bune date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Beju Traian* (lic. Arad), *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braieșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Brădețeanu C. Cornel, Brüll M. Leon* (lic. Cantemir, București), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gh. Ioan* (lic. Chișinău), *Colero Aurel* (lic. Focșani), *Comănescu Al.* (lic. Slatina), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu Gh.* (lic. Tg.-Mureș), *Feneșan Iancu* (lic. Caransebeș), *Flickstein J.* (student, Cernăuți). *Gataiantu V. Barbu* (lic. Caracal), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov). *Goldstein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Gulian Emil* (lic. Giurgiu), *Hainer Samuel* (lic. Botoșani), *Herscovici Emanoil* (lic. Galați), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Iliescu Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Șt. Petre* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru-Haret, București), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Al. Mihai* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Katz P.* (Șc. Polit. București), *Katz S.* (lic. Botoșani), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Marinescu Tr.* (Giurgiu) *Milculescu G. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Mitescu D-tru Remdecht* (lic. Tg.-Mureș), *Marineanu Toma* (lic. M-rea Dealu), *Neacșu V., Nedelcu Gh. Ilie* (lic. Ciurgiu), *Negroiu Pascu* (lic. Tg.-Mureș), *Niculescu Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Pamula Al.* (lic. Botoșani), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Pârvulescu Titus* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popescu Dem. Marin,* (lic Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici Chr. Ioan* (lic. Galați), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Rauchbach Arthur* (Gura Humorului), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatiu Mihail* (abs. lic. Pitești), *Stroescu Gh.* (lic. Tg.-Mureș), *Șușelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Taraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (București), *Vasilescu Mircea* (lic, Giurgiu), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vasiliu G. Jon* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu Gh. Neculai* (lic. Focșani), *Vlădoianu Tiberiu* (lic. M-rea Dealu), *Vlăduțu Sabin* (lic. M-rea Dealu), *Wagner W. I.* (lic. Craiova) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

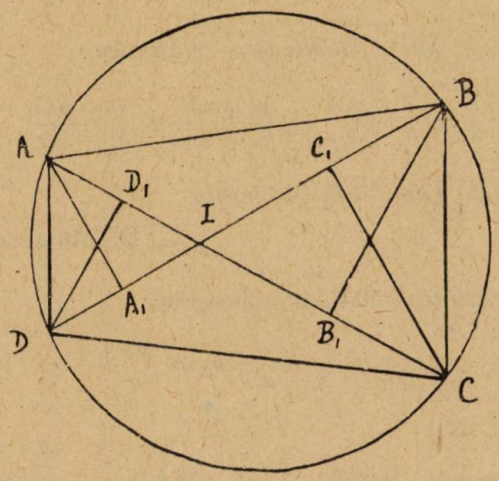
297. — *Se consideră un patrulater inscriptibil* ABCD. *Fie* A_1, C_1 *proecțiile lui* A *și* C *pe* BC *și* B_1, D_1 *proecțiile lui* B *și* D *pe* AC. *Să se arate că avem:*

$$\frac{AC}{AA_1+CC_1} = \frac{BD}{BB_1+DD_1}$$

OVIDIU GH. POPEA

Prima soluție dată de d-nii: *Bârglăzan Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Boju Șt. Rosetel* (lic. Timișoara), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Marin* (Șc. mil. de Geniu), *Golcea Cornel* (Cluj), *Marian Solomon* (lic. Câmpu-

lung, Bucovina), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Nan Victor*, *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Radu Ilie* (lic. Timişoara), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulet B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara), *Ropcean Ioan* (lic. Câmpulung Moldovenesc), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu) *Weiss Solomon* (Galaţi) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).



Să evaluăm în două moduri aria patrulaterului A B C D, avem:

$$(1)\quad \text{aria}(ABCD) = \text{aria}(ABC) + \text{aria}(ADC)$$
$$= \frac{AC \times BB_1}{2} + \frac{AC \times DD_1}{2} = \frac{AC}{2}(BB_1 + DD_1)$$

$$(2)\quad \text{aria}(ABCD) = \text{aria}(ABD) + \text{aria}(BCD)$$
$$= \frac{BD \times AA_1}{2} + \frac{BD \times CC_1}{2} = \frac{BD}{2}(AA_1 + CC_1)$$

Din compararea relaţiilor (1) şi (2), deducem:

$$AC(BB_1 + DD_1) = BD(AA_1 + CC_1)$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{AC}{AA_1 + CC_1} = \frac{BD}{BB_1 + DD_1}$$

care este tocmai relaţia cerută:

Observare. Fiindcă n'am folosit de loc inscriptibilitatea patrulaterului, rezultă că proprietatea cerută este adevărată în orice patrulater, ceiace a fost observat de mulţi din rezolvitorii acestei probleme.

Soluţia **2**-a, dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* [lic. Giurgiu], *Ardelea Radu* [lic. Braşov], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bercovici A. Emil* [student], *Berdan C.* [Bârlad], *Bocancea I. Kirilă* [lic. Tg.-Mureş], *Boju Rosetel* (lic. Timişoara), *Bolgiu Ovidiu* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Botea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Botis V.* [lic. Arad], *Brüll M. Leon* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Calmanovici Savu* [iic. Cantemir, Bucureşti], *Cândea Gh. Ioan* [lic. Sibiu], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Ciută Gavril* [Şc. Polit. Timişoara], *Comănescu Al. Bălteni*, *Corşoreanu Gh. Gheorghe* [lic. Tg.-Jiu], *Costăchescu Gh.* [lic. Tg.-Mureş], *Diaconu B. Marin* [lic. M-rea Dealu], *Dumitrescu Gh. Marin* [lic. Caracal], *Epure T. Ştefan* [Buzău], *Fratici Ioan* [lic. Braşov], *Gârleşteanu Mihail* [lic. Timişoara], *Grigorescu L. Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Grofşoreanu I. Gheorghe* [lic. Arad], *Iliescu Şt. Dima* [lic. Tg. Mureş], *Iliescu Grigore* [lic. M-rea Dealu]. *Iliescu St. Petru* [lic. M-rea Dealu], *Ionescu Bujor Th. C-tin* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Al. Mihai* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Katz Pincu* [Şc. Polit. Bucureşti], *Lupan Em.* [Seminarul Pedagogic, Iaşi], *Marin Paul* [student, Cluj], *Manafu Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Mauriciu Ghelber* [Seminarul Pedagogic, Bucureşti], *Milculescu G. D-tru* [lic. M-rea Dealu], *Mitescu D-tru Remdecht* [lic. Tg.-Mureş], *Marineanu Toma* [lic. M-rea Dealu], *Negroiu Pascu* [lic. Tg.-Mureş], *Niculescu Gh.*, [lic. M-rea Dealu], *Pamula Alexandru* [lic. Botoşani], *Popescu Argetoaia Nicu* [Şc. de Artilerie], *Pascu D.* [lic. Braşov], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Percea Viorel* [lic. Timişoara], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Popp I. Emilian* [lic. M-rea Dealu], *Rauchbach Arthur* [lic Gura Humorului], *Şerban I. Tiberiu* [lic. Braşov], *Şerbănescu O.* [Constanţa], *Silion G. Ion* [lic. Braşov], *Spârchez Zeno* [lic. Braşov), *Şuşelescu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Stamatescu I. Valeriu* [Seminarul Ped., Bucureşti], *Stamatiu Mihail* [Abs. Piteşti], *Stănciulescu George* [Piteşti], *Stroescu I. Gheorghe* [lic. Tg.-Mureş], *Tăraş Vasile* [lic. Braşov], *Teodorescu M. Dumitru* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Teodorescu N. Gheorghe*]lic. Braşov], *Toma Nicolae* [lic. Tg.-Mureş], *Vasilescu Mircea* [lic. Giurgiu], *Vasiliu C. Ion* [lic M-rea Dealu], *Vătăşan G. Ovid* [Şc. Polit., Timişoara] şi *Vlăduţu Sabin* [lic. M-rea Dealu].

Triunghiurile dreptunghice AIA_1 CIC_1, DID_1 şi BIB_1 având câte un unghiu în M egal, sunt asemenea. Din asemănarea primelor două triunghiuri, deducem:

$$(1)\quad \frac{AI}{AA_1} = \frac{CI}{CC_1} = \frac{AI + CI}{AA_1 + CC_1} = \frac{AC}{AA_1 + CC_1}$$

Din asemănarea triunghiurilor BIB, şi DID_1, deducem:

$$(2)\quad \frac{BI}{BB_1} = \frac{DI}{DD_1} = \frac{BI + DI}{BB_1 + DD_1} = \frac{BD}{BB_1 + DD_1}$$

Din triunghiurile asemenea AIA_1 şi BIB_1, avem încă :

$$(3) \qquad \frac{AI}{AA_1} = \frac{BI}{BB_1}$$

Ţinând seamă de relaţiile stabilite (1) şi (2) relaţia (3) devine :

$$\frac{AC}{AA_1 + CC_1} = \frac{BD}{BB_1 + DD_1}$$

Observare. Nici demonstraţia dată aci nu necesită ca patrulaterul $ABCD$ să fie iscriptibil, propietatea se menţine dar în orice patrulater, ceiace mulţi rezolvitori au observat.

Generalizare dată de d-nii: Lăzărescu Fl. Ştefan (lic. Giurgiu) şi *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu).

Să considerăm un patrulater oarecare $ABCD$. *Fie* A_1, C_1 *proecţiile sub acelaşi unghiu* α *a vârfurilor* A *şi* C *pe diagonala* BD *şi* B_1, D_1 *proecţiile sub acelaşi unghiu* α *a vârfurilor* B *şi* D *pe diagonala* AC. *Să se stabilească relaţia:*

$$\frac{AC}{AA_1 + CC_1} = \frac{BD}{BB_1 + DD_1}$$

Insemnăm $\sphericalangle AID = \beta$ şi considerăm triunghiurile AIA_1, CIC_1, BIB_1 şi DID_1 şi scrim respectiv în fiecare din ele, că laturile sunt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse, avem :

$$\frac{AI}{AA_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{CI}{CC_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\frac{BI}{BB_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{DI}{DD_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

de unde deducem uşor :

$$\frac{AI}{AA_1} = \frac{CI}{CC_1} = \frac{BI}{BB_1} = \frac{DI}{DD_1}$$

$$= \frac{AC}{AA_1 + CC_1} = \frac{BD}{BB_1 + DD_1}$$

Egalitatea ultimelor rapoarte este tocmai relaţia cerută.

Alte soluţii date de d-nii : *Cristea Aurel* [lic. Focşani], *Critz Mendel* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea] şi *Tărăbută C. Paul* lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti].

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii : *Constantinescu Gr. Ion* [Buzău], *David I. Ioan* [Buzău], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iaşi], *Georgescu Jean* [lic. M-rea Dealu], *Ghinicescu I. Gheorghe* [lic. Internat, Iaşi], *Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iaşi], *Popescu Spirea* [lic. M-rea Dealu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat], *Râmniceanu L. Radu* [lic. Tg.-Jiu] şi *Roşu Alexandru* [lic. M-rea Dealu].

302. — *Să se stabilească relaţiunea :*

$$\frac{r}{R} = \frac{r_a \cos A}{h_a + 2r_a} + \frac{r_b \cos B}{h_b + 2r_b} + \frac{r_c \cos C}{h_c + 2r_c}$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

C. D. MIHAESCU

In virtutea relaţiilor cunoscute :

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \quad h_a = \frac{2s}{a}$$

putem scri :

$$\frac{r_a \cos A}{h_a + 2r_a} = \frac{\cos A}{\frac{h_a}{r_a} + 2} = \frac{\cos A}{\frac{2s}{a} \cdot \frac{p-a}{s} + 2} = \frac{a \cos A}{2p}$$

Analog, avem :

$$\frac{r_b \cos B}{h_b + 2r_b} = \frac{b \cos B}{2p}, \quad \frac{r_c \cos C}{h_c + 3r_c} = \frac{c \cos C}{2p}$$

Atunci :

$$\frac{r_a \cos A}{h_a + 2r_a} + \frac{r_b \cos B}{h_b + 2r_b} + \frac{r_c \cos C}{h_c + 2r_c} = \frac{a \cos A}{2p}$$

$$+ \frac{b \cos B}{2p} + \frac{c \cos C}{2p} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{2p}$$

$$= \frac{2s}{R} \cdot \frac{1}{2p} = \frac{s}{p} \cdot \frac{1}{R} = \frac{r}{R},$$

fiindcă :

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C =$$

$$\frac{aR \cos A + bR \cos B + cR \cos C}{R} = \frac{2s}{R} \text{ şi, } \frac{s}{p} = r$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii : *Alexandrescu Vasile* (Ploeşti), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (lic. Huşi), *Bârglăzan A.* (Şc. Polit. Timişoara)) *Beju O. Traian* (lic, Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad). *Blumenfeld M. David*

(lic. Botoşani), *Boju Rosetel* (lic. Timişoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. (M-rea Dealu), *Ciută G.* (Şc. Polit. Timişoara), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Coşniţă Virgil* (lic. Bârlad), *Cristea Aurel* (lic. Focşani), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Dumitrescu Sile* (Câmpina), *Gabrieleseu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gărleşteanu M.* (lic. Timişoara), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Golstein L. M.* (Sem. Pedagogic, Bucureşti), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grofşoreanu I. Gheorghe*, *Iliescu Petre* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz P.* (Şc. Polit. Bucureşti), *Lăzărescu H. Şt.* (Giurgiu), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Mihăilescu T. Romeo* (R.-Vâlcea), *Mirescu A. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rauchbach Arthur* (Gura Humorului), *Rădulet B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara), *Şerban I. Tib.* (lic. Braşov), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Spârchez Zeno* (lic. Braşov), *Specu Gh. Petru*, *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Pedagogic, Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stănciulescu A. George* (Piteşti) *Stănescu A. Nicolae* (Şc. Polit. Timişoara), *Tănăsescu Mărioara* (Oradia-Mare), *Tărăbuţă C.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tunaru R. Traian* şi *Vasilescu Mircea* (lic. Giurgiu).

Observări. 1. D-l *Ciorănescu I. C-tin* a stabilit încă analog următoarele identităţi:

$$\sum \frac{r_a \cot \frac{A}{2}}{h_a + 2r_a} = \frac{4R + r}{p}, \quad \sum \frac{r_a \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{h_a + 2r_a} = \frac{2R - r}{p}$$

$$\sum \frac{r_a \cos^2 \frac{A}{2}}{h_a + 2r_a} = \frac{R + r}{2R}, \quad \sum \frac{r_a \sin A}{r_a + 2r_a} = \frac{r(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

2. D-l *Katz P.* a stabilit următoarele identităţi:

$$\sum \frac{r_a \operatorname{cosec} A}{h_a + 2r_a} = \frac{3R}{p}, \quad \sum \frac{(h_a + 2r_a) \sin A}{r_a} = \frac{6p}{R}$$

$$\sum \frac{(h_a + 2r_a) \cos^2 \frac{A}{2}}{r_a} = \frac{2p^3}{abc}$$

şi

$$\sum \frac{r_a \cos^2 \frac{A}{2}}{h_a + 2r_a} = \frac{R + r}{2R}$$

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Apăteanu Camil* (lic. Arad), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Laurenţiu Vlaţiu* (Constanţa), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Şuşelescu Ion* (lic. M-rea Dealu) *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu) şi *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

320. — *Dacă:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0,$$

atunci expresiunea:

$$\frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 9xyz}{(x+y)^3 + (x+z)^2 + (y+z)^3},$$

este independentă de x, y, z.

V. ALACI

Notăm cu E expresiunea dată, dezvoltând'o avem succesiv.

$$E = \frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 9xyz}{(x+y)^3 + (x+z)^3 + (y+z)^3} =$$

$$\frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 9xyz}{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 + 3x(xy+xz) + 3y(xy+yz) + 3z(xz+yz)}$$

Dar din relaţia de condiţie dată:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0,$$

care se poate scri încă:

$$xy + xz + yz = 0,$$

deducem:

$$xy + xz = -yz, \quad xy + yz = -xz, \quad xy + yz = -xy$$

Substituind aceste valori în numitorul ultimului membru din expresiunea lui E, găsim:

$$E = \frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 9xyz}{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 3xyz - 3xyz - 3xyz}$$

$$= \frac{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 9xyz}{2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 9xyz} = 1.$$

In virtutea relaţiei de condiţie expresia dată este deci 1, adică independentă de x, y, z.

Soluţiuni bune date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Boju Rosetel* (lic. Timişoara), *Bosie V.*, *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Cârsteanu Traian* (Şc. Polit. Timişoara), *Cheteanu I. Tulius* (lic. Craiova), *Ciorănescu*

I. C-tin (lic. M-rea Dealu), *Cligher A.* (Şc. Polit. Timişoara). *Constantinescu Venus* (Şc. Polit. Timişoara), *Cormanscki* (Şc. Polit. Timişoara), *Corsoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Cristea Aurel* (lic. Focşani), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Dumitrescu C. Nic.* (lic. Piteşti), *Flickstein I.* (student, Cernăuţi), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov). *Goldstein N.* (Şc. Polit. Timişoara), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grofşoreanu I. Gheorghe, Herşcovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iscovici I. Paul* (lic. Piteşti), *Kertész Paul, Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu). *Milner I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Nicolau G. C.* (liceul R.-Sărat), *Obreja I., Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popper E.* (lic. Timişoara), *Rădulescu P. Marin* (Giurgiu), *Rămniceann L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Stamatescu I. Valeriu* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Simicnescu D. Gh.* (lic M-rea Dealu), *Ştefănescu Emil, Tăraş Vasile* (Lic. Braşov), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Vătăşan G. O.* (Şc. Polit. Timişoara).

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Beldie N. D-tru, Berardo N. Bernardis, Caftangioglu C. C., Epure Ştefan, Florea C. Alexandru, Grigorescu L. Ioan, Ianculescu Octavian, Jojea Nicolae, Lepădatu I. Victor, Mihăilescu Romeo, Percea Viorel, Petrescu Şt. Alexandru, Popovici C, C-tin, Rauchbach Arthur, Roşu Alexandru, Silion Gh. Ion, Spârchez Zeno, Tărăbuţă C. Paul, Teodorescu M. D-tru, Wagner W. I.*, şi *Wetter Anna.*

In ultimul timp s'au primit soluţi ni dela d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic Giurgiu), *Braester I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti) şi *Zamfirescu Alex.* (Piteşti).

PROBLEME PROPUSE

360. — Dacă $a \pm b$ şi $\alpha \pm \beta$ se divide cu m, atunci şi $a\alpha - b\beta$ şi $a\beta - b\alpha$ se va divide cu m.

CAP. I. LINTES

361. — Să se găsească un număr ştiind că triplul produsului cifrelor este egal cu suma cuburilor lor, iar suma cifrelor este un cub perfect.

STANCULESCU I. C-TIN

362. — Se dă un pentagon regulat A B C D E înscris într'un cerc. Se unesc mijloacele laturilor lui, se obţine pentagonul A' B' C' D' E'. Să se demonstreze că produsul perimetrului pentagonului mic prin raza cercului circumscris pentagonului mare, este egal cu produsul perimetrului pentagonului mare prin raza cercului circumscris pentagonului mic.

FLORESCU OPREA

363. — Unind mijloacele laturilor unui dreptunghiu se formează un paralelogram. Perpendicularele duse din vârfurile dreptunghiului pe laturile paralelogramului se întâlnesc pe dreptele ce unesc mijloacele laturilor dreptunghiului.

WEISS SOLOMON

364. — Dacă $b^2 - 4ac$ este patrat perfect, atunci şi expresiunea:

$$(b^2 - 2ac - bc)^2 + 4c[b^3 - ac(a+c) - 3abc],$$

este patrat perfect.

V. ALACI

365. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(x+y-2xy+xy^2+x^2y)+x^2y^2=35 \\ x^2+z^2-2(x+z-2xz+xz^2+x^2z)+x^2z^2=143 \\ y^2+z^2-2(y+z-2yz+yz^2+y^2z)+y^2z^2=63 \end{cases}$$

GEORGESCU JEAN

366. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^3+y^3=(x+y)^2.$$

TAUBER ALEXANDRU

367. — Să se demonstreze că în orice triunghiu — notaţiile fiind cele obicinuite — există relaţia:

$$r + R\sum \sin A \sin B \cos C = \frac{p^2 - r^2}{4R}$$

LEPADATU I. VICTOR

368. — In orice triunghiu avem relaţia:

$$\frac{2r}{abc}(ar_a + br_b + cr_c) = \frac{h-h_b}{r_b-r_a} + \frac{h_b-h_c}{r_c-r_b} + \frac{h_c-h_a}{r_a-r_c}$$

DROGEANU NICOLAE

INFORMATIUNE

A apărut Culegere de Exerciţii şi Probleme de Algebră Elementară, partea I, de I. Dumitriu, profesor Arad. Numărul mare de exerciţii şi diversitatea lor poate fi de mare folos tuturor celor ce vor să câştige îndemânarea calculului algebric.

Comenzile se pot face la R. M. T. în schimbul a 40 lei.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaş, timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Abonamentul pe anul IV-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 AUGUST 1924 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. AFLAREA DIRECTA A MAXIMULUI UNUI PRODUS SI A MINIMULUI UNEI SUME.
2. NOTE MATEMATICE, 12.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. CONCURS
5. PROBLEME REZOLVATE: 271, 298, 282,
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile roblemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

AFLAREA DIRECTA A MAXIMULUI UNUI PRODUS ŞI A MINIMULUI UNEI SUME

de V. ALACI

1. Ceiace m'a determinat a scrie acest articol, este o notă din „G. M." an. XXIX, Octombrie 1923 a d-lui *I. Stoenescu.*

D-sa generalizează problema 2871, rezolvată în „G. M.", an. XXVII, pag. 408, al cărei enunţ este: *Să se calculeze minimul sumei*:

$$S = 2x + 3xy + 4xyz,$$

ştiind că, $x^4 y^3 z^2 = a$ (a, constant).

Generalizarea concepută de d-l *Stoenescu* este următoarea: *Să se afle minimul sumei:*

$$S_n = A_1 x_1 + 2A_2 x_1 x_2 + 3A_3 x_1 x_2 x_3 + \ldots n A_n x_1 x_2 \ldots x_n$$

ştiind că:

$$(1) \qquad x_1^{\alpha} x_2^{\alpha-1} x_3^{\alpha-3} \ldots x_n^{\alpha - \frac{n(n-1)}{2}} = a = \text{ct.}$$

$A_1, A_2, \ldots A_n$ *fiind constante, iar* $\alpha = \dfrac{n(n+1)}{2}$

In acest scop d-sa descompune în mod abil suma S_n, astfel:

$$\begin{aligned} S_n = {} & A_1 x_1 + A_2 x_1 x_2 + A_3 x_1 x_2 x_3 + \ldots + A_n x_1 x_2 \ldots x_n \\ & + A_2 x_1 x_2 + A_3 x_1 x_2 x_3 + \ldots + A_n x_1 x_2 \ldots x_n \\ & + A_3 x_1 x_2 x_3 + \ldots + A_n x_1 x_2 \ldots x_n \\ & \ldots \\ & + A_n x_1 x_2 \ldots x_n \end{aligned}$$

Produsul acestor termeni fiind:

$$A_1 A_2^2 A_3^3 \ldots A_n^n x_1^{\alpha} x_2^{\alpha-1} \ldots x_n^{\alpha - \frac{n(n-1)}{2}} = A_1 A_1^2 A_3^3 \ldots A_n^n a$$

deci constant, conchide că minimul sumei are loc când termenii sunt egali, adică:

$$A_1 x_1 = A_2 x_1 x_2 = A_3 x_1 x_2 x_3 = \ldots = A_n x_1 x_2 \ldots x_n,$$

de unde:

$$x_2 = \frac{A_1}{A_2}, \quad x_3 = \frac{A_2}{A_3}, \ldots x_n = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

Inlocuind aceste valori în produs, se obţine:

$$x_1 = \frac{\sqrt[\alpha]{a A_1 A_2^2 A_3^3 \ldots A_n^n}}{A_1}$$

şi rezultă că:

$$\min. S_n = \alpha \sqrt[\alpha]{a A_1 A_2^2 \ldots A_n^n}$$

2. Când exponenţii din relaţia de condiţie (1) n'au regularitatea de acolo, sau când termenii sumei S_n cuprind variabilele într'o formă mai generală, descompunerea abilă de mai sus nu mai reuşeşte trebuie şi a recurge la alte metode.

Problema mai generală care se impune şi pe care o vom soluţiona în cele ce urmează este următoarea:

Să se calculeze minimul sumei:

$$S_n = A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} + A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} + \ldots$$
$$\ldots + A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

ştiind c

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = a = \text{ct.},$$

variabilele $x_1, x_2, \ldots x_n$ *fiind pozitive, iar toţi coeficienţii şi exponenţii, constanţi.*

Iată cum soluționăm această problemă. Observăm că produsul, $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = a$ se mai poate scri:

$$(1)\quad \left(A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}\right)^{u_1} \left(A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}\right)^{u_2} \ldots \left(A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}\right)^{u_n} = a\, A_1^{u_1} A_2^{u_2} \ldots A_n^{u_n}$$

cu condiție ca $u_1, u_2, \ldots u_n$ să satisfacă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + \ldots + l_1 u_n = m_1 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + l_2 u_n = m_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n u_1 + b_n u_2 + \ldots + l_n u_n = m_n \end{cases}$$

Regula lui *Cramer* ne permite a scri imediat valorile lui $u_1, u_2, \ldots u_n$, anume:

$$(2)\qquad u_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad u_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots u_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

unde:

$$(3)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots l_1 \\ a_2 & b_2 \ldots l_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n & b_n \ldots l_n \end{vmatrix},\quad \text{presupus} \neq 0,$$

iar un Δ_i oarecare ($i = 1, 2 \ldots n$), se obține din Δ, înlocuind elementele coloanei de rangul i, respectiv prin $m_1, m_2, \ldots m_n$. Acum dacă notăm:

$$(4)\quad A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} = X_1,\quad A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} = X_2, \ldots A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} = X_n,$$

relația de condiție (1) devine:

$$(5)\quad X_1^{u_1} X_2^{u_2} \ldots X_n^{u_n} = a\, A_1^{u_1} A_2^{u_2} \ldots A_n^{u_n} = \text{ct.}$$

— unde $u_1, u_2, \ldots u_n$ au valorile date de (3) — iar suma S_n de mai sus, devine:

$$(6)\qquad S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Relațiile (4) definesc pe $X_1, X_2, \ldots X_n$ ca funcțiuni de variabilele independente $x_1, x_2, \ldots x_n$ și cum determinantul lor funcțional:

$$(7)\quad \frac{D(X_1, X_2, \ldots X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{a_1 X_1}{x_1} & \frac{b_1 X_2}{x_1} \ldots \frac{l_1 X_n}{x_1} \\ \frac{a_2 X_1}{x_2} & \frac{b_2 X_2}{x_2} \ldots \frac{l_2 X_n}{x_2} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{a_n X_1}{x_n} & \frac{b_n X_2}{x_n} \ldots \frac{l_n X_n}{x_n} \end{vmatrix} = \frac{X_1 X_2 \ldots X_n}{x_1 x_2 \ldots x_n} \Delta,$$

este $\neq 0$, pentrucă Δ e presupus diferit de zero, rezultă că $X_1 X_2, \ldots X_n$ sunt variabile independente în relațiile (5) și (6).

Așa dar avem de aflat minimul sumei a mai multor cantități variabile pozitive, produsul puterilor lor fiind constant, ceiace cetim din expresiunea (6) și relația de condiție (5). După o teoremă bine cunoscută, minimul lui S_n are loc, când variabilele sunt proporționale cu exponenții, adică când avem:

$$\frac{X_1}{u_1} = \frac{X_2}{u_2} = \ldots = \frac{X_n}{u_n}$$

Inlocuind aci pe $X_1, X_2, \ldots X_n$ cu valorile lor din (4) și pe $u_1, u_2, \ldots u_n$ cu valorile lor date de (3), putem scri, simplificând cu Δ care intră în fiecare raport.

$$(8)\quad \frac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{\Delta_1} = \frac{A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}}{\Delta_2} = \ldots = \frac{A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}{\Delta_n} = \lambda,$$

λ fiind valoarea comună a rapoartelor.

Putem deci enunța următoarea teoremă.

Teorema I. Dacă $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt niște cătimi pozitive variabile, dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$; $l_1, l_2, \ldots l_n$; $m_1, m_2, \ldots m_n$ sunt niște numere algebrice pozitive, unele putând fi și nule și dacă produsul:

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = a = \text{ct.}$$

atunci suma:

$$S_n = A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} + A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} + \ldots + A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

este minimă când avem:

$$\frac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{\begin{vmatrix} m_1 & b_1 \dots l_1 \\ m_2 & b_2 \dots l_2 \\ \dots & \dots \\ m_n & b_n \dots l_n \end{vmatrix}} = \frac{A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & m_1 \dots l_1 \\ a_2 & m_2 \dots l_2 \\ \dots & \dots \\ a_n & m_n \dots l_n \end{vmatrix}}$$

$$= \dots = \frac{A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots m_1 \\ a_2 & b_2 \dots m_2 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \dots m_n \end{vmatrix}}$$

Sa răspundem acum complect la problemă, căutând efectiv minimul lui S_n. Din relaţiile (8) deducem:

$$(9)\quad A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = \lambda \Delta_1,\ A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} = \lambda \Delta_2,$$
$$\dots A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} = \lambda \Delta_n,$$

şi înlocuind în expresiunea lui S_n, găsim;

$$\text{min. } S_n = (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)\lambda,$$

unde λ rămâne a fi determinat. Pentru aceasta folosim expresiunea produsului (5), înlocuind pe X_1, $X_2, \dots X_n$, cu valorile lor din (4) sau cu acelea date de (9), iar $u_1, u_2, \dots u_n$ cu valorile date de (2) şi avem:

$$(\lambda \Delta_1)^{\frac{\Delta_1}{\Delta}} (\lambda \Delta_2)^{\frac{\Delta_2}{\Delta}} \dots (\lambda \Delta_n)^{\frac{\Delta n}{\Delta}} = a\, A_1^{\frac{\Delta_1}{\Delta}} A_2^{\frac{\Delta_2}{\Delta}} \dots A_n^{\frac{\Delta n}{\Delta}}$$

Ridicând la puterea Δ, şi scoţând valoarea lui λ, găsim:

$$\lambda = \sqrt[\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta n]{a^{\Delta} \left(\frac{A_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{A_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \dots \left(\frac{A_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta n}}.$$

Rezultă atunci:

$$(10)\qquad \text{min. } S_n = (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) \sqrt[\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta n]{a^{\Delta} \left(\frac{A_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{A_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2} \dots \left(\frac{A_n}{\Delta_n}\right)^{\Delta n}}$$

Această formulă (10) care dă minimul lui S_n, o putem folosi direct în aplicaţiuni.

Observare. Teorema stabilită şi deci şi formula (10) sunt valabile numai când $u_1, u_2, \dots u_n$ sunt pozitivi, sau $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ au acelaşi semn.

Aplicaţiuni. Ca aplicaţiuni vom soluţiona problema 2871 din „G, M." şi nota d-lui *I. Stoenescu*, enunţată la începutul acestui articol.

Problema 2871. Să se calculeze minimul sumei.

$$S = 2x + 3xy + 4xyz,$$

ştiind că: $x^4 y^3 z^2 = a$ (a constant).

P. Tudoran.

Vom folosi direct formula (10), dar pentru aceasta vom calcula întâi pe $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, având acelaşi semn, putem aplica acum formula (10) şi găsim:

$$\text{min. } S = (1+1+2)\sqrt[4]{a\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)^2}$$

$$\text{min. } S = 4\sqrt[4]{24a}$$

Nota d-lui I. Stoenescu. Să aflăm minimul sumei.

$$S = A_1 x_1 + 2A_2 x_1 x_2 + 3A_3 x_1 x_2 x_3 + \dots n A_n x_1 x_2 \dots x_n$$

ştiind că:

$$x_1^{\alpha} x_2^{\alpha-1} x_3^{\alpha-3} \dots x_n^{\alpha - \frac{n(n-1)}{2}} = a = \text{ct.}$$

unde: $$\alpha = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suntem în condiţiile teoremei I, deci putem folosi formula (10), dar mai întâi să calculăm pe Δ, $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$; avem:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\ldots1\\0&1&1\ldots1\\0&0&1\ldots1\\\cdot&\cdot&\cdot\ldots\cdot\\0&0&0\ldots1\end{vmatrix}=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}\alpha&1&1\ldots1\\\alpha-1&1&1\ldots1\\\alpha-3&0&1\ldots1\\\cdot&\cdot&\cdot\ldots\cdot\\n&0&0\ldots1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\ldots0\\2&1&0\ldots0\\3&0&1\ldots0\\\cdot&\cdot&\cdot\ldots\cdot\\n&0&0\ldots1\end{vmatrix}=1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\alpha&1\ldots1\\0&\alpha-1&1\ldots1\\0&\alpha-3&1\ldots1\\\cdot&\cdot&\cdot\ldots\cdot\\0&n&0\ldots1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha-1&1\ldots1\\\alpha-3&1\ldots1\\\cdot&\cdot\ldots\cdot\\n&0\ldots1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\ldots0\\3&1\ldots0\\\cdot&\cdot\ldots\cdot\\n&0\ldots1\end{vmatrix}=2$$

In mod analog deducem:

$$\Delta_3=3,\quad \Delta_4=4,\ldots\Delta_n=n$$

$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ având același semn, minimul lui S ne este dat de formula (10) și găsim:

$$\min.\ S=(1+2+\ldots+n)\sqrt[(1+2+\ldots+n)]{a\left(\frac{A_1}{1}\right)^1\left(\frac{2A_2}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{nA_n}{n}\right)^n},$$

și ținând seamă că; $\frac{n(n+1)}{2}=\alpha$, avem:

$$\min.S=\sqrt[\alpha]{a\,A_1A_2^2\ldots A_n^n}$$

valoare găsită și de d-l *Stoenescu*.

2. Acum vom demonstra o teoremă pentru aflarea directă a maximului unui produs analoagă cu teorema I și vom găsi și formula care să dea acel maxim, asemănătoare cu formula (10).

Teorema II. Dacă $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sunt niște cătimi pozitive variabile, dacă* $a_1, a_2, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_n$; $l_1, l_2, \ldots l_n$; $m_1, m_2, \ldots m_n$ *sunt niște numere algebrice pozitive, unele putând fi și nule și dacă suma:*

$$A_1x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}+A_2x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}+\ldots+A_nx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}=a=\text{ct.},$$

atunci produsul:

$$P=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

este maxim, când avem:

$$\frac{A_1x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}}{\begin{vmatrix}m_1&b_1\ldots l_1\\m_2&b_2\ldots l_2\\\cdot&\cdot\ldots\cdot\\m_n&b_n\ldots l_n\end{vmatrix}}=\frac{A_1x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}}{\begin{vmatrix}a_1&m_1\ldots l_1\\a_2&m_2\ldots l_2\\\cdot&\cdot\ldots\cdot\\a_n&m_n\ldots l_n\end{vmatrix}}$$

$$=\ldots=\frac{A_nx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\ldots m_1\\a_2&b_1\ldots m_2\\\cdot&\cdot\ldots\cdot\\a_n&b_n\ldots m_n\end{vmatrix}}$$

Demonstrația este aproape analoagă cu cea din teorema de mai sus.

Observăm ușor că produsul P se poate scrie încă:

$$(1)\qquad P=\frac{\left(A_1x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}\right)^{u_1}\left(A_2x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}\right)^{u_2}\ldots\left(A_nx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}\right)^{u_n}}{A_1^{u_1}A_2^{u_2}\ldots A_n^{u_n}}$$

cu condiție ca $u_1, u_2, \dots u_n$ să satisfacă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + \dots + l_1 u_n = m_1 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 + \dots + l_2 u_n = m_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n u_1 + b_n u_2 + \dots + l_n u_n = m_n \end{cases}$$

Regula lui *Cramer* ne permite a scri imediat:

$$(2) \qquad u_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad u_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots u_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

unde:

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 \dots l_2 \\ \dots & \dots \\ a_n & b_n \dots l_n \end{vmatrix}, \quad \text{presupus} \neq 0,$$

iar un Δ_i oarecare, $(i = 1, 2, \dots n)$, se obține din Δ, înlocnind elementele coloanei de rangul i, respectiv cu $m_1, m_2, \dots, m_n$. Acum dacă notăm:

$$(4) \quad A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = X_1, \quad A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} = X_2,$$
$$\dots A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} = X_n,$$

relația de condiție devine:

$$(5) \qquad X_1 + X_2 + \dots + X_n = a.$$

iar expresiunea (1) a produsului devine:

$$(6) \qquad P = \frac{X_1^{u_1} X_2^{u_2} \dots X_n^{u_n}}{A_1^{u_1} A_2^{u_2} \dots A_n^{u_n}}$$

Relațiile (4) definesc pe $X_1, X_2, \dots X_n$ ca funcțiuni de variabilile independente $x_1, x_2, \dots x_n$ și cum determinantul lor funcțional:

$$(7) \qquad \frac{D(x_1, x_2, \dots x_n)}{D(X_1, X_2, \dots X_n)} = \begin{vmatrix} \frac{a_1 X_1}{x_1} & \frac{b_1 X_2}{x_1} \dots & \frac{l_1 X_n}{x_1} \\ \frac{a_2 X_1}{x_2} & \frac{b_2 X_2}{x_2} \dots & \frac{l_2 X_n}{x_2} \\ \frac{a_n X_n}{x_n} & \frac{b_n X_n}{x_n} \dots & \frac{l_n X_n}{x_n} \end{vmatrix} = \frac{X_1, X_2 \dots X_n}{x_1, x_2, \dots x_n} \Delta$$

este $\neq 0$, pentru că Δ e presupus diferit de zero, rezultă că $X_1, X_2, \dots X_n$ sunt variabile independente în relațiile (5) și (6).

Privind expresia (6), vedem că maximul lui P, are loc odată cu maximul produsului $X_1^{u_1} X_2^{u_2} \dots X_n^{u_n}$ și cum relația (5) scrie că suma factorilor este constantă, după o teoremă bine cunoscută maximul lui $X_1^{u_1} X_2^{u_2} \dots X_n^{u_n}$ și deci și a lui P, are loc, când avem:

$$\frac{X_1}{u_1} = \frac{X_2}{u_2} = \dots = \frac{X_n}{u_n}$$

Inlocuind aci pe $X_1, X_2, \dots X_n$ cu valorile lor din (4) și pe $u_1, u_2, \dots u_n$ cu valorile lor date de (3), putem scri simplificând cu Δ care intră în fiecare raport:

$$(8) \qquad \frac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{\Delta_1} = \frac{A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}}{\Delta_2} = \dots = \frac{A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}}{\Delta_n} = \lambda,$$

λ fiind valoarea comună a rapoartelor. Teorema este astfel stabilită.

Ne propunem acum a calcula efectiv maximul lui P.

Din relațiile (8) deducem:

$$(9) \quad A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} = \lambda \Delta_1, \quad A_2 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} = \lambda \Delta_2,$$
$$\dots A_n x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} = \lambda \Delta_n,$$

și înlocuind în (6) ținând seamă de relațiile (4), avem;

$$\max. P = \left(\frac{\Delta_1}{A_1}\right)^{u_1} \left(\frac{\Delta_2}{A_2}\right)^{u_2} \dots \left(\frac{\Delta_n}{A_n}\right)^{u_n} \cdot \lambda^{u_1 + u_2 + \dots + u_n},$$

unde λ rămâne a fi determinat. Pentru aceasta folosim relația (5), înlocuind pe $X_1, X_2, \dots X_n$, cu valorile lor (4) sau cu acelea date de (9), avem:

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)\lambda = a,$$

$$\lambda = \frac{a}{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}$$

Rezultă atunci:

$$(10) \qquad \max. P = \sqrt[\Delta]{\left(\frac{\Delta_1}{A_2}\right)^{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_2}{A_2}\right)^{\Delta_2} \dots \left(\frac{\Delta_n}{A_n}\right)^{\Delta_n} \left(\frac{a}{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}\right)^{\Delta + \Delta + \dots + \Delta_n}}$$

Această formulă (10) care dă maximul lui P, o putem folosi direct în aplicaţiuni.

Observare. Teorema stabilită şi deci şi formula (10) sunt valabile numai când $u_1, u_2, \ldots u_n$ sunt pozitivi, sau $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ au acelaşi semn.

Aplicaţie. Să se afle maximul produsului[1]*:*

$$P = x^7 y^8 x^9$$

ştiind că avem:

$$x^2 y^3 + y z^4 + z^5 x^6 = a \qquad (a \text{ constant})$$

Vom folosi direct formula (10), dar pentru aceasta vom calcula întâi pe $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 82, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 173,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 137, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 38.$$

$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ având acelaşi semn putem aplica acum formula (10) şi găsim:

$$\max. P = \sqrt[82]{173^{173} \times 137^{137} \times 38^{38} \left(\frac{a}{348}\right)^{348}}$$

Observare. Teoremele I şi II de mai sus, le-am stabilit încă de mult timp în „G. M.“, an. XIX, pag. 401, în articolul *„Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume“* şi dacă am reluat din nou demonstraţia lor, este pentru a o prezinta sub o formă mai complectă şi a pune în evidenţă mai ales formulele (10), —care n'au fost date în articolul menţionat şi care au o importanţă deosebită, prin folosirea lor directă în aplicaţii.

Am reluat din nou încă demonstrarea acestor teoreme şi pentru a aduce o nouă contribuţie, căutând să stabilesc încă o teoremă în acest domeniu, ceiace vom face în numărul viitor.

(Va urma).

1) A se vedea „G. M“ an. XIX, pag. 402.

NOTE MATEMATICE

12. — *Asupra unor teoreme de maxim şi minim*

Sunt bine cunoscute următoarele două teoreme.

1. *Dacă variabilele pozitive* $x, y, \ldots t$ *satisfac relaţia*

$$x + y + \ldots + t = a \qquad (a \text{ constant}),$$

atunci produsul:

$$P = x^m y^n \ldots t^s \quad (m, n, \ldots s \text{ întregi pozitivi}),$$

este maxim când avem:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \ldots = \frac{t}{s}$$

2. *Dacă variabilele pozitive* $x, y, \ldots t$ *satisfac relaţia:*

$$x^m y^n \ldots t^s = a$$

(a constant şi $m, n, \ldots s$ întregi pozitivi),

atunci suma:

$$S = x + y + \ldots + t$$

este minimă, când avem:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \ldots = \frac{t}{s}$$

In tratatele obicinuite sunt demonstrate aceste teoreme, numai în cazul când puterile $m, n, \ldots s$ sunt întregi şi pozitive.

Ne propunem a extinde aceste teoreme şi la cazul când puterile ar fi numere fracţionare sau incomensurabile, pozitive. Vom admite de sigur teoremele, stabilite pentru cazul puterilor întregi pozitive.

Prima teoremă. a) Cazul când $m, n, \ldots s$ *sunt numere fracţionare pozitive.* Fie r cel mai mic comun multiplu al numitorilor numerilor $m, n, \ldots s$, atunci ele sunt de forma.

$$(1) \qquad m = \frac{m_1}{r}, \quad n = \frac{n_1}{r}, \ldots s = \frac{s_1}{r}$$

$m_1, n_1, \ldots s_1$ fiind întregi. Produsul P, se scrie atunci:

$$P = x^{\frac{m_1}{r}} y^{\frac{n_1}{r}} \ldots t^{\frac{s_1}{r}}$$

Ridicând la puterea r, avem:

$$P^r = x^{m_1} y^{n_1} \dots z^{s_1}$$

Evident că maximul lui P, are loc odată cu maximul lui P^r. Cum însă, $x+y+\dots+t=a$, şi $m_1, n_1, \dots s_1$ sunt întregi pozitivi, ştim în acest caz că maximul lui P^r are loc când avem:

$$(2) \qquad \frac{x}{m_1} = \frac{y}{n_1} = \dots = \frac{t}{s_1}$$

Divizând cu r numitorii acestor rapoarte şi folosind relaţiile (1), şirul de rapoarte (2) devine:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \dots = \frac{t}{s}$$

pentru care P^r şi deci P este maxim. Prima teoremă enunţată este deci valabilă şi când $m, n, \dots s$ sunt numere fracţionare, pozitive.

b) Cazul când $m, n, \dots s$ sunt numere incomensurabile.

Vom defini în acest caz numerile $m, n, \dots s$, după cum este cunoscut prin două şiruri de numere fracţionare, un şir crescător şi altul descrescător. Putem scrie astfel:

$$(1) \quad \begin{array}{l} m_1 < m_2 < \dots < m_n \dots < m < \dots < m'_n < m'_{n-1} \dots < m'_1 \\ n_1 < n_2 < \dots < n_n \dots < n < \dots < n'_n < n'_{n-1} \dots < n'_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_1 < s_2 < \dots < s_n \dots < s < \dots < s'_n < s'_{n-1} \dots < s'_1 \end{array}$$

Numerile

$$m_i, n_i \dots s_i \text{ şi } m'_i, n'_i \dots s'_i \; (i = 1, 2, \dots n, \dots)$$

sunt numere fracţionare care se pot apropia ori cât de mult vrem de $m, n, \dots s$ când i creşte foarte mult, şi cu o notaţie consacrată putem scri:

$$(2) \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{i=\infty} m_i = m, \; \lim\limits_{i=\infty} n_i = n, \dots \lim\limits_{i=\infty} s_i = s \\ \lim\limits_{i=\infty} m'_i = m, \; \lim\limits_{i=\infty} n'_i = n, \dots \lim\limits_{i=\infty} s'_i = s. \end{array}$$

In locul produsului dat să considerăm produsele:

$$P_i = x^{m_i} y^{n_i} \dots t^{s_i} \text{ sau } P'_i = x^{m'_i} y^{n'_i} \dots t^{s'_i}$$

produse care tind către produsul P dat, pentru $i = \infty$,

Cum, $x+y+\dots+t=a$, iar $m_i, n_i, \dots s_i$; $m'_i, n'_i, \dots s'_i$ sunt numere fracţionare pozitive, maximul lui P_i are loc, când avem:

$$(3) \qquad \frac{x}{m_i} = \frac{y}{n_i} = \dots = \frac{t}{s_i},$$

iar al lui P'_i, când avem:

$$(4) \qquad \frac{x}{m'_i} = \frac{y}{n'_i} = \dots = \frac{t}{s'_i}$$

Cum condiţia (3) care face pe P_i maxim, sau condiţia (4) care face pe P'_i maxim, se menţine oricât de mult s'ar apropia numerile $m_i, n_i, \dots s_i$; $m'_i, n'_i, \dots s'_i$ în şirul (1) de $m, n, \dots s$, rezultă că ele se menţin şi la limită, adică pentru $i=\infty$ şi în acest caz condiţiile (3) şi (4) se reduc în virtutea egalităţilor (2), la condiţia

$$(5) \qquad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \dots = \frac{t}{s} = 1$$

care va face maxim produsul P, către care tind în acest caz produsele P_i sau P'_i. Prima teoremă este deci valabilă şi în acest caz.

Observare. Cu foarte mici modificări putem demonstra la fel şi teorema 2, în cazurile când $m, n, \dots s$ ar fi numere raţionale sau iraţionale pozitive.

Aşa dar putem enunţa mai general cele 2 teoreme, suprimând restricţiunea că: numerile $m, n, \dots s$ sunt întregi pozitivi şi spunând numai $m, n, \dots s$ sunt numere algebrice pozitive. De aceste enunţuri mai generale a teoremelor 1 şi 2, m'am folosit de altfel în articolul din prezentul număr.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXIX, No. 11, Iulie 1924, Cursuri de matematici la Paris, în anul şcolar 1922—1923, de *P. Sergescu*. Ecuaţiile traectoriei unui proectil în aer, de *Căpitan I. Linteş*.

2. *Foaia Matematică*, an. I, No. 7, Iulie 1924. Rezolvarea generală a unor probleme de divizibilitate, de Căpitan *I. Linteş*.

3. *Foaia Matematică*, an. I, No. 8, August 1924. Asupra teoremei ortopolului şi isopolului, de *B. M. Barbalatt*.

CONCURS

Revista Matematică din Timişoara, a obţinut dela un donator care doreşte să păstreze anonimatul suma de lei 1000, pentru a se acorda un premiu celui mai harnic corespondent.

Se publică deci concurs pentru obţinerea acestui premiu care se va ţine după următoarele regule:

1) Cine doreşte să ia parte la concurs va trebui să se înscrie prin o carte poştală la d-l Prof. V. Alaci, Piaţa Doja, No. 12, Timişoara.

2) Pentru a putea concura la acest premiu este necesar ca să fie abonat pe anul în curs.

3) Candidatul va trebui să rezolve cât mai multe din problemele de concurs care se vor publica în numerile 6, 7, 8, 9 a revistei şi care vor fi însemnate cu un asterisc *).

Clasificaţia se va face după închiderea concursului în modul următor:

Fiecare problemă de concurs, care a fost propusă în aceste patru numere, şi a cărei soluţie justă, bine redactată şi îngrijită este primită, dă dreptul la câte 5 puncte.

Fiecare problemă simplă propusă în aceste patru numere, a cărei soluţie justă, bine redactată şi îngrijită este primită dă dreptul la 2 puncte.

Fiecare problemă rezolvată de concurent, şi publicată în numerile 1, 2, 3, 4 ale revistei,dă dreptul la câte un punct.

Premiul se va acorda celui care întruneşte numărul cel mai mare de puncte.

Următorii cinci vor fi menţionaţi.

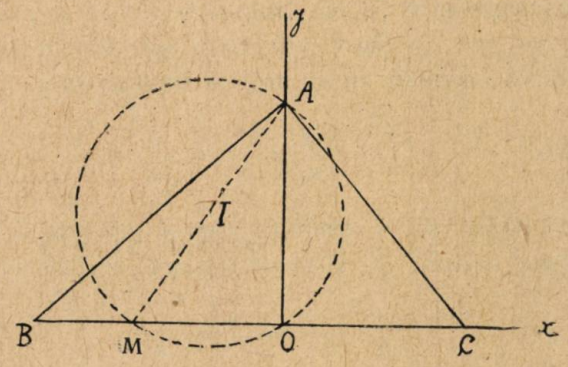
In caz când doi candidaţi vor avea acelaş număr de puncte, se va examina activitatea în trecut a candidatului şi redactarea problemelor pentru a se acorda preferinţa.

Comisiunea pentru alegerea problemelor, triarea soluţiilor şi acordarea premiului se compune din d-nii: Rector *V. Vâlcovici*, Prof. *V. Alaci*, Lt.-Col. *Gh. Buicliu*, Prof. *A. Coman* şi Ing. *C. Teodorescu*.

PROBLEME REZOLVATE

271. — *Fie* A B C *un triunghiu oarecare şi* M *un punct mobil pe latura* B C. *Să se dovedească că cercurile descrise pe* A M *ca diametru trec printr'un punct fix.*

STANCULESCU I. C-TIN



Fie A B C triunghiul dat şi M un punct oarecare pe latura B C. Descrim pe A M ca diametru un cerc care taie din nou latura B C în punctul O. Unim punctul A cu O şi observăm că ∢ A O M este drept, fiind înscris într'o jumătate de cerc, rezultă deci că O este piciorul înălţimei vârfului A, deci este fix. Toate cercurile descrise dar pe A M, oricare ar fi M pe B C, trec astfel prin punctul fix O, piciorul înălţimei vârfului A.

Soluţie dată de d-nii: *Adam Radu* (lic. Constanţa), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (lic. Huşi). *Bălean G.* (lic. Timişoara), *Bărglăzan Aurel* (Şc, Pol., Timişoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Bolgiu Ovidiu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Botea Nicolae* (lic Cantemir, Bucureşti), *Cândea Gh. Ioan* (lic. Sibiu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic M-rea Dealu), *Ciută G.* (Şc. Polit. Timişoara), *Cocorandu M.* (Şc. Polit. Timişoara), *Corşoreanu Gh. Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Davidsohn Mişu* (Sem. Pedagogic, Bucureşti), *Drogeanu N. Niculae* (Sem. Pedagogic, Bucureşti), *Flickstein J.* (student, Cernăuţi), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu C. Ioan* (lic. Piteşti), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Pedagogic, Bucureşti), *Gheorghiu C. Comăneşti-Gheorghiu G. Olimpia, Giotta Vincenţiu* (Bârlad), *Grabovskii Eugeniu* (lic. Orhei), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Iliescu Emilian* (Zătreni-Vâlcea), *Iliescu Dan. Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galaţi), *Laurentiu L. Vlaţiu* (Constanţa), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Mironovici Virginia* (Câmpulung, Bucovina), *Mitescu Dem. Remdeeth* (lic. Tg.-Mureş), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Moroianu At.* (lic. Constanţa), *Muşta St.* (Timişoara), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Niculescu Isaia* (Mizil), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Panaitescu I. Al.* (lic. Piteşti), *Pantazi Gh. Dumitru* (Brălla), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (Timişoara). *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Ploeşti), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Po-*

pescu N. Corneliu (lc. Giurgiu), *Popovici I. Dan* (lic. Chişinău), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popescu J. Grigore* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Porumbaru I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Propst Jean* (Şc. Polit. Timişoara), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scripcă C. Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Şerbănescu O.* (Constanţa), *Silion Gh. Ion, Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Smigelschi Octavian, Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Stambuleanu Adrian* (Şc. Polit. Timişoara), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Ped. Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (Şc. Polit. Bucureşti), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănescu A. Nicolae* (Şc. Polit. Timişoara), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Stroescu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Suşelescu Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Vlteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit. Timişoara), *Vlăduţu I. Sabin* (lic. M-rea Dealu), *Weiss Solomon* (lic. Galaţi) *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) şi *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu),

Observări. 1 Mulţi din rezolvitorii de mai sus au făcut următoarele observaţiuni: *a)*. Problema se poate enunţa mai general, astfel: *Fie un punct fix* A, *o dreaptă fixă* Δ *şi un punct mobil* M *pe* Δ. *Cercurile descrise pe* A M *ca diametru, trec printr'un punct fix, diferit de A.*

b). Locul geometric al centrelor cercurilor de diametru A M, este o paralelă la dreapta Δ, ce trece prin mijlocul distanţei dela A la Δ.

c) Perpendiculara din A la Δ este axul radical al cercurilor descrise pe A M, ca diametru.

2. D-nii: *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani) şi *Udrisky I. Traian* (lic. Arad), au enunţat şi demonstrat următoarea problemă mai generală:

Fie A *un punct fix*, Δ *o dreaptă fixă şi* M *un punct mobil pe* Δ. *Să se arate că segmentele de cerc capabile de un acelaşi unghiu* α, *descrise pe* A M *de o aceiaşi parte, trec printr'un punct fix.* Demonstraţia se face arătându-se că toate segmentele de cerc capabile de unghiul α descrise pe A M de o aceiaşi parte, intersectează dreapta Δ în acelaşi punct, care este punctul fix cerut. In cazul $\alpha = 90^0$, punctul fix, este piciorul perpendicularei din A pe Δ.

Soluţie analitică dată de d-nii: *Basacov St. Gogu* (student), *Bârglăzan St. Aurel* (Sc. Polit., Timişoara), *Berdan C.* (Bârlad), *Georgescu N. Ion* (Ialomiţa), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Iscovici I.* (Piteşti), *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Ploeşti), *Petrulian Nicu* (Ploeşti), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Stănescu D.* (Timişoara).

Luăm drept axe de coordonate, B C ca axă de x şi A O ca axă de y. Fie $(0, a)$, $(b, 0)$. $(c, 0)$ respectiv coordonatele lui A, B, C şi $(0, \lambda)$ coordonatele punctului M. Atunci coordonatele centrului I a cercului descris pe A M ca diametru sunt $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{a}{2}\right)$, iar raza I A a acestui cerc este:

$$\overline{IA} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}{2}$$

şi deci ecuaţia cercului I, de raza I A, este:

$$\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2 + a^2}{4}$$

$$\text{***} \quad x^2 + y^2 - \lambda x - ay = 0.$$

Acest cerc este evident variabil λ fiind variabil, dar el trece necontenit prin origină, de oarece din ecuaţie lipseşte termenul liber. Origina O, adică piciorul perpendicularei din A pe Δ, este punctul fix prin care trec cercurile I.

298. — *Să se descompună într'un produs, expresiunea:*

$$(x-1)^3(y-z)^3 + (y-1)^3(z-x)^3 + (z-1)^3(x-y)^3$$

M. SAVESCU

Prima soluţie dată de d-nii: *Manoil Adolf* (lic. Roman) şi *Niculescu Alexandru* (lic. Tg.-Mureş)

Insdmnând cu E expresia dată, putem scri:

$$E = (x-1)^3(y-z)^3 + [(y-1)(z-x) + (z-1)(x-y)]^3 - 3(y-1)(z-1)(z-x)(x-y)[(y-1)(z-x) + (z-1)(x-y)]$$

Cum:

$$(y-1)(z-x) + (z-1)(x-y) = -z - xy + xz + y = -x(y-z) + (y-z) = -(x-1)(y-z),$$

E, devine:

$$E = (x-1)^3(y-z)^3 - (x-1)^3(y-z)^3 + 3(y-1)(z-1)(z-x)(x-y)(x-1)(y-z) = 3(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x),$$

Expresiunea dată e descompusă astfel într'un produs de factori.

Soluția 2-a dată de d-nii: *Apăteanu Camil* (lic. Arad), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Constantinescu Gh. Ioan* (lic. Chișinău), *Grofșorean I. Gheorghe*, *Ionescu Jean* (lic. Spiru Haret, București), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Popescu Argentoaia N.* (Șc. mil. de Artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Ped. București) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

Pentru $x=1$, expresia dată E devine:

$$E=(y-1)^3(z-1)^3+(z-1)^3(1-y)^3\equiv 0,$$

E, se divide deci cu $x-1$; analog arătăm că E se divide și cu $y-1$ și $z-1$. Observăm încă că pentru $x=y$, E, devine:

$$E=(y-1)^3(y-z)^3+(y-1)^3(z-y)^3\equiv 0,$$

E, se divide deci cu $x-y$; analog arătăm că E se divide și cu $y-z$ și cu $z-x$. Expresia dată e divizibilă atunci și cu produsul:

$$(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x)$$

și câtul nu poate fi de cât o constantă, împărțitorul având același grad cu E. Putem deci scri:

$$E=k(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x)$$

unde k este o constantă care trebue determinată. Vom particulariza pe x, y, z și luând de exempiu: $x=2,\ y=0,\ z=-1$, găsin:

$$1+27-64=-12k,$$

$$k=3.$$

***

Atunci:

$$E=3(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x),$$

și expresia dată este descompusă în factori.

Soluția 3-a dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Anghel M. Radu* (Șc. Polit. Timișoara), *Bercovici A. Emil* (student, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Șc. Polit. Timișoara), *Flickstein J.* (student, Cernăuți), *Grigorescu L. Ioan* (lic M-rea Dealu), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Pop I. Emilian* (lic. M-rea Dealu) *Rauchbach Arthur* și *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu).

Vom folosi identitatea:

$$(1)\quad a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Dacă luăm:

$$a=(x-1)(y-z),\ b=(y-1)(z-x),\ c=(x-1)(x-y),$$

și observăm că:

$$a+b+c=xy-y-xz+z+$$
$$yz-z-xy+x+xz-x-yz+y=0$$

$$a+b=(x-1)(y-z)+(y-1)(z-x)=-y-zx$$
$$+zy+x=-x(z-1)+y(z-1)=-(z-1)(x-y$$

și analog:

$$b+c=-(x-1)(y-z),\ c+a=-(y-1)(z-x),$$

atunci identitatea (1) devine:

$$(x-1)^3(y-z)^3+(y-1)^3(z-x)^3+(z-1)^3(x-y)^3$$
$$=3(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x),$$

și avem astfel descompusă în factori expresia dată.

Soluția 4-a dată de d-nii: *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul), *Vasiliu C. Ioan* (lic. M-rea Dealu) și *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu).

Folosim metoda din articolul „O clasă de identități algebrice" din „R. M. T.", an. II, No. 1.

În adevăr, identitatea trigonometrică din „Culegere de Probleme", pag. 382:

$$\sin^2 a\sin^3(b-c)+\sin^3 b\sin^3(c-a)+\sin^3 c\sin^3(a-b)$$
$$=3\sin a\sin b\sin c\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a),$$

în virtutea formulelor lui Euler devine:

$$(1)\ \sum\left(\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)^3\left(\frac{e^{i(b-c)}-e^{-i(b-c)}}{2i}\right)^3=3\left(\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)$$
$$\left(\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ic}-e^{-ic}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i(b-c)}-e^{-i(b-c)}}{2i}\right)$$
$$\times\left(\frac{e^{i(c-a)}-e^{-i(c-a)}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{2i}\right)$$

Simplificând cu $-\frac{1}{64}$ și în urmă notând:

$$e^{ia}=\sqrt{x},\quad e^{ib}=\sqrt{y},\quad e^{ic}=\sqrt{z}$$

relațiunea (1) devine:

$$\sum\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\right)=3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\left(\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$$

și aducând la formă integră găsim:

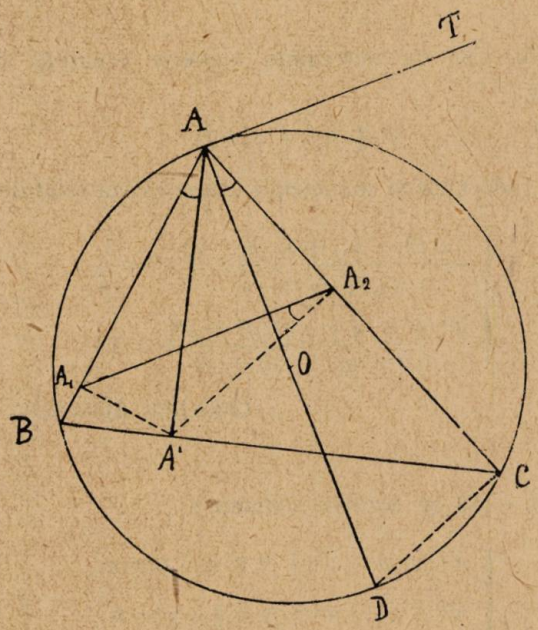
$$\Sigma(x-1)^3(y-z)^3=3(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x)$$

și avem astfel descompusă în factori expresia dată.

Alte soluții date de d-nii: *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Grofșoreanu I. Gheorghe*, *Ianculescu Octavian* (Șc. Indus., Timișoara), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu Bujor T. C-tin* (lic. Cantemir, București), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), și *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București).

282. — *Fie un triunghiu* A B C, *înscris într'un cerc* O. *Fie* A_1 *și* A_2 *proecțiile piciorului perpendicularei* A A′ *pe laturile* A B *și* A C. *Să se demonstreze că dreapta* A_1A_2 *este perpendiculara pe diametrul vârfului* A.

PINCU KATZ



Fie D intersecția diametrului vârfului A cu cercul O. Triunghiurile A A′ B și A C D fiind dreptunghice respectiv în A′ și C și având $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ pentrucă au aceiași măsură, rezultă și $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle DAC$. De altă parte unghiul B A A′ sau $A_1AA' = \sphericalangle A_1A_2A'$ ca având aceiași măsură, patrulaterul $AA_1A'A_2$ fiind inscriptibil, unghiurile din A_1 și A_2 fiind drepte. Conchidem atunci că și $\sphericalangle DAC = \sphericalangle A_1A_2A'$ și cum ele au câte o latură perpendiculară, anume $A'A_2 \perp AC$, rezultă că celelalte laturi ale lor sunt și ele perpendiculare, adică $A_1A_2 \perp AD$, ceiace trebuia dovedit.

Soluție dată de d-nii: *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Ciută G.* (Șc. Polit. Timișoara), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, București), *David I. Ioan* (Buzău), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Ionescu T. Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Nicolae* (lic. Pitești), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Moroianu At.* (lic. Constanța), *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat. Iași), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rădulet Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Roșu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Smigelschi Octavian* (Șc. Polit. Timișoara), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Solomon Weiss* (lic. Galați), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași) și *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași).

Soluția 2-a dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat) și *Georgescu C. Ion* (lic. Pitești).

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1A'A$ având laturile perpendiculare una pe alta, de altă parte $\sphericalangle A_1A'A = \sphericalangle A_1A_2A$ având aceiași măsură, patrulaterul $AA_1A'A_2$ fiind inscriptibil, unghiurile din A_1 și A_2 fiind drepte. Rezultă atunci că $\sphericalangle A_1A_2A = \sphericalangle ABC$ deci dreapta A_1A_2 este antiparalelă cu B C. Acum dacă ducem în A, tangenta A T, vedem că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle TAC$ având aceiași măsură, rezultă că și A T e antiparalelă cu B C, deci paralelă cu A_1A_2. Cum tangenta A T știm că e perpendiculară pe diametrul A D și paralela sa A_1A_2 este perpendiculară pe A D, ceiace era de dovedit.

Observări. 1. Unii dintre rezolvitori au observat că în loc să proectăm pe A′ pe laturile A B și A C, putem proecta orice alt punct al înălțimei A A′ pe aceleași laturi și dreapta care ar uni proecțiile, ar fi tot perpendiculară pe diametru A D.

2. D-nii: *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov) și *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie) au dat soluțiuni analitice.

PROBLEME PROPUSE

369. — Să se găsească două patrate perfecte de forma $a\,b\,c\,d$ și $a'\,b'\,c'\,d'$ astfel ca numerile $a\,b$ și $a'\,b'$ să fie consecutive, iar $c\,d$ și $c'\,d'$ patrate consecutive.

BELDIE N. D-TRU

370. — Să se găsească numerile de trei cifre $a\,b\,c$, astfel ca cifrele lor să satisfacă relația:

$$7a+3b=4c.$$

EMIL STEFANESCU

371. — Se dă un patrulater inscriptibil A B C D. Fie A_1, D_1 proecțiile vârfurilor A, D pe dreapta B C și B_1, C_1 proecțiile vârfurilor B, C pe dreapta A D. Să se demonstreze că: 1) patrulaterul $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ este inscriptibil; 2) patrulaterul format de centrele cercurilor A B C, $B\,B_1\,A$, $C\,C_1\,D$ și $A_1\,B_1\,C_1$ este paralelogram.

IONESCU I. PAUL

372.* — Se dau cercurile O, O′ de raze R și R′. Fie A și A′ două puncte fixe pe cele două cercuri. Se cere:

1) Să se construiască pe cele două cercuri și în același senz, arcele A M, A′M′ respectiv proporționale cu R și R′.

2) Dacă P și P′ sunt punctele care împart pe M M′ în raportul $\frac{R}{R'}$ să se arate că cercul de diametrul P P′ trece printr'un punct fix F.

3) Să se arate că triunghiurile F A A′, F O O′ și F M M′ sunt asemeni.

4) Să se caute locul lui F când A și A′ se mișcă pe cele două cercuri.

5) Să se arate cum trebuesc modificate proprietățile precedente când R și R′ sunt egale.

6) Să se examineze când A M și A′M′ sunt luate în senzuri diferite.

LOCOT.-COL. GH BUICLIU

373.* — Se dă dreptunghiul A B C D. Vârfurile B și D se mișcă pe laturile A B și A D așa fel că perimetrul dreptunghiului rămâne constant.

Se cere:

1) Locul vârfului C.

2) Să se demonstreze că perpendiculara CC′ dusă din C pe diagonala B D trece printr'un punct fix.

ION PROTOPOPESCU

374.* — Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=2}^{n}(2^{n-k+1}-1)(k^2-3k)=2(2^n-1)-\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

V ALACI

375. — Să se determine numeric ecuațiile de forma:

$$x^2+px+q=0,$$

între rădăcinele și coeficienții căreia există relațiile:

$$\begin{cases}\dfrac{x_1(2-x_2)+x_2(2-x_1)}{x_1x_2(x_1+x_2)}=\dfrac{1}{3}\\[2ex]\dfrac{p^2(p^2-q^2)-q^2(q^2-p^2)}{p(p-q)-q(q-p)}=13\end{cases}$$

GHELBER MAURICIU

376. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}x^2-y^2-z^2+xy+zx=a\\y^2-z^2-x^2+yz+xy=b\\z^2-x^2-y^2+zx+yz=c\end{cases}$$

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

377. — Să se demonstreze că în orice triunghiu există relația:

$$\sum(a^2-bc\cos A)=2R(2R+r^2),$$

notațiile fiind cele obicinuite.

DORNEANU S. V.

INFORMATIUNI

In *Monitorul Oficial,* No. 126, din 13 Iunie 1924, la pagina 6525. coloana 2-a, sunt publicate catedrele ce se găsesc vacante la Şcoala Politechnică din Timişoara, având cel puţin patru ore de curs pe săptămână şi anume:

1. *Geometria analitică;*
2. *Mecanică;*
3. *Fizică;*
4. *Tehnologie;*
5. *Topografie;*
6. *Mineralogie şi petrografie;*
7. *Maşini miniere;*
8. *Metalurgie;*
9. *Geologie economică şi zăcămînt;*
10. *Maşini electrice;*
11. *Centrale electrice, distribuţia energiei;*
12. *Construcţiuni.*

D-nii candidaţi doritori de a ocupa aceste catedre, vor adresa cererile lor direcţiunii sus zisei şcoli în termenul fixat de două luni care expiră la 13 August 1924.

In conformitate cu Decretul-lege relativ la înfiinţarea şi organizarea şcoalelor Politechnice din România, publicat în *Monitorul Oficial*, No. 10, din 19 Iunie 1920 se aduce la cunoştinţa celor interesaţi că la Şcoala Politechnică din Timişoara care cuprinde două secţiuni.

a) Secţiunea de ingineri electromecanici,

b). Secţiunea ingineri de mine şi metalurgie,

admiterea şi matricularea studenţilor în anul I se face pe baza unui examen de admitere care se va ţine la 6 Octombrie a. c., ora 8 dimineaţa, în localul şcoalei, în Timişoara I, str. Tunari, 2.

Inscrierea la acest examen se face prin o cerere timbrată adresată Direcţiunii şcoalei şi însoţită de următoarele acte originale:

a) Actul de naştere,

b) Un certificat medical constatând că candidatul este de o constituţie sănătoasă,

c) Una din următoarele diplome:

Diploma de absolviue a opt clase de liceu,

Diploma de absolvire a unei şcoli superioare de comerţ,

Diploma de absolvire a unei şcoli de conducători de lucrări publice,

Diplomă de absolvire a unei şcoli superioare de arte şi meseri,, însoţită de certificatul de absolvire a patru clase secundare.

Diplomele altor şcoli străine vor trebui să fie echivalate de Ministerul Instrucţiunii.

Examenul de admitere are loc înscris şi oral în faţa unei comisiuni sub preşedenţia directorului şcoalei. Candidaţii care nu posedă bine limba română pot da exameuul din oricare din limbile franceză, germană, maghiară indicând aceasta în cererea de înscriere.

Cererile de înseriere pentru examen se primesc la cancelaria şcolii pânăla 30 Septembrie seara cel mai târziu.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul I al şcolii în ordinea de merit după notele obţinute.

Taxele şcolare sunt următoarele:

200 lei taxa de înscriere pentru examenul de admitere în şcoală.

Această taxă se achită înainte de închiderea înscrierilor adică de 30 Septembrie.

400 lei taxa de frecvenţă anuală.

De această taxă nu poate fi scutit nimeni.

Programul cunoştinţelor cerute la examenul de admitere în anul I al şcoalei, se găseşte în *Monitorul Oficial, No. 81, din 15 Iulie 1922.*

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 SEPTEMBRIE 1924 NO. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 EI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. AFLAREA DIRECTA A MAXIMULUI UNUI PRODUS SI A MINIMULUI UNEI SUME.
2. NOTE MATEMATICE, 13.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 263. 283, 285, 300, 306, 324
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile roblemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

AFLAREA DIRECTA A MAXIMULUI UNUI PRODUS ŞI A MINIMULUI UNEI SUME

de V. ALACI

(urmare*)

3. Vom demonstra acum o altă teoremă, mai generală ca cele stabilite în numărul precedent.

Teorema III. Dacă variabilele pozitive $x_1, x_2, \ldots x_n$ *satisfac relaţiunile:*

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} + A_2 x_1^{a_n+1} \ldots x_n^{a_{2n}} + \ldots + A_p x^{a_{(p-1)n+1}} \ldots x_n^{a_{pn}} = A \\ B_1 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n} + B_2 x_1^{b_n+1} \ldots x_n^{b_{2n}} + \ldots + B_q x^{b_{(q-1)n+1}} \ldots x_n^{b_{qn}} = B \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1 x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} + L_2 x_1^{l_n+1} \ldots x_n^{l_{2n}} + \ldots + L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}} \ldots x_n^{l_{sn}} = L, \end{array}\right.$$

$$p + q + \ldots + s = n,$$

atunci produsul: $P = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ *este maxim, când avem:*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}{\Delta_1} = \dfrac{A_2 x_1^{a_n+1} \ldots x_n^{a_{2n}}}{\Delta_2} = \ldots = \dfrac{A_p x_1^{a_{(p-1)n+1}} \ldots x_n^{a_{pn}}}{\Delta_p} \\ \dfrac{B_1 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}}{\Delta_{p+1}} = \dfrac{B_2 x_1^{b_n+1} \ldots x_n^{b_{2n}}}{\Delta_{p+2}} = \ldots = \dfrac{B_q x_1^{b_{(q-1)n+1}} \ldots x_n^{b_{qn}}}{\Delta_{p+q}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{L_1 x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}{\Delta_{n-s+1}} = \dfrac{L_2 x_1^{l_n+1} \ldots x_n^{l_{2n}}}{\Delta_{n-s+2}} = \ldots = \dfrac{L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}} \ldots x_n^{l_{sn}}}{\Delta_n} \end{array}\right.$$

unde un Δ_i *oarecare* $(i = 1, 2 \ldots n)$ *se obţine din:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_{n+1} \ldots l_{(s-1)n+1} \\ a_2 & a_{n+2} \ldots l_{(s-1)n+2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n & a_{2n} \ldots l_{sn} \end{vmatrix}, \quad \text{presupus} \neq 0,$$

înlocuind elementele coloanei de rangul i, prin $m_1, m_2, \ldots m_n$. *Toate cătimele exceptând* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sunt presupuse constante.*

Observăm uşor că produsul P se poate scrie încă:

*) A se vedea „R. M.“, an. IV, No. 6.

$$(1)\qquad P=\frac{\left(A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}\right)^{u_1}\left(A_2 x_1^{a_n+1}\dots x_n^{a_{2n}}\right)^{u_2}\dots\left(L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}}\dots x_n^{l_{sn}}\right)^{u_n}}{A_1^{u_1}A_2^{u_2}\dots L_s^{u_n}}$$

cu condiție ca $u_1, u_2, \dots u_n$ să satisfacă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} a_1 u_1 + a_{n+1} u_2 + \dots + l_{(s-1)n+1} u_n = m_1 \\ a_2 u_1 + a_{n+2} u_2 + \dots + l_{(s-1)n+2} u_n = m_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + l_{sn} u_n = m_n \end{cases}$$

Regula lui *Cramer* ne permite a scri imdeiat:

$$(2)\qquad u_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad u_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\dots u_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

unde Δ are valoarea scrisă în enunț, iar un Δ_i oarecare se deduce cum am spus în enunț din Δ, înlocuind elementele coloanei de rangul i, prin $m_1, m_2, \dots m_n$.

Acum dacă notăm:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2}\dots x_n^{a_n}=X_1,\quad A_2 x_1^{a_n+1}\dots x_n^{a_{2n}}=X_2,\dots A_p x_1^{a_{(p-1)n+1}}\dots x_n^{a_{pn}}=X_p \\ &B_1 x_1^{b_1} x_2^{b_2}\dots x_n^{b_u}=X_{p+1},\ B_2 x_1^{b_n+1}\dots x_n^{b_{2n}}=X_{p+2},\dots B_q x_1^{b_{(q-1)n+1}}\dots x_n^{b_{qn}}=X_{p+q} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &L_1 x_1^{l_1} x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}=X_{n-s+1},\ L_2 x_1^{l_n+1}\dots x_n^{2n}=X_{n\ s+2},\dots L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}}\dots x_n^{l_s}=X_n \end{aligned}$$

atunci relațiile de condiție devin:

$$(4)\qquad \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_p = A \\ X_{p+1} + X_{p+2} + \dots + X_{p+q} = B \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-s+1} + X_{n-s+2} + \dots + X_n = L, \end{cases}$$

iar expresia (1) a produsului devine:

$$(5)\qquad P=\frac{X_1^{u_1} X_2^{u_2}\dots X_n^{u_n}}{A_1^{u_1} A_2^{u_2}\dots L_s^{u_n}}$$

Relațiile (3) definesc pe $X_1, X_2, \dots X_n$ ca funcțiuni de variabilele independente $x_1, x_2, \dots x_n$ și cum determinantul lor funcțional:

$$(6)\qquad \frac{D(X_1, X_2, \dots X_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)}=$$

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1 X_1}{x_1} & \frac{a_{n+1} X_2}{x_1} & \dots & \frac{l_{(s-1)n+1} X_n}{x_1} \\ \frac{a_2 X_2}{x_2} & \frac{a_{n+2} X_2}{x_2} & \dots & \frac{l_{(s-1)n+2} X_n}{x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n X_n}{x_n} & \frac{a_{2n} X_2}{x_n} & \dots & \frac{l_{sn} X_n}{x_n} \end{vmatrix} = \frac{X_1, X_2, \dots X_n}{x_1, x_2, \dots x_n}\Delta$$

este $\neq 0$, pentrucă Δ e presupus diferit de zero, rezultă că $X_1, X_2, \dots X_n$ sunt variabile independente în relatiile (4) și (5).

Privind relațiunea (5), vedem că maximul lui P, are loc odata cu maximul produsului (7) $X_1^{u_1} X_2^{u_2} \dots X_n^{u_n}$, dar fiindcă variabilele $X_1, X_2, \dots X_n$ satisfac relațiile (4), maximul produsului (7), are loc când produsele parțiale:

$$P_1 = X_1^{u_1} X_2^{u_2} \dots X_p^{u_p}$$

$$P_2 = X_{p+1}^{u_{p+1}} X_{p+2}^{u_{p+2}} \dots X_{p+q}^{u_{p+q}}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_k = X_{n-s+1}^{u_{n-s+1}} X_{n-s+2}^{u_{n-s+2}} \dots X_n^{u_n},$$

vor fi maxime, ori cum (4) scrie că suma factorilor acestor produse este constant, maximul fiecărui produs, după o teoremă bine cunoscută are loc, când factorii sunt proporționali cu exponenții.

Rezultă dar clar că maximul lui P, are loc când avem simultan satisfăcute relațiile:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{A_1 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}{\Delta_1} = \dfrac{A_2 x_1^{a_n+1} \dots x_n^{a_{2n}}}{\Delta_2} = \dots = \dfrac{A_p x_1^{a_{(p-1)n+1}} \dots x_n^{a_{pn}}}{\Delta_p} \\ \dfrac{B_1 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}}{\Delta_{p+1}} = \dfrac{B_2 x_1^{b_n+1} \dots x_n^{b_{2n}}}{\Delta_{p+2}} = \dots = \dfrac{B_q x_1^{b_{(q-1)n+1}} \dots x_n^{b_{qn}}}{\Delta_{p+q}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{L_1 x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}}{\Delta_{n-s+1}} = \dfrac{L_2 x_1^{l_n+1} \dots x_n^{l_{2n}}}{\Delta_{n-s+2}} = \dots = \dfrac{L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}} \dots x_n^{l_{sn}}}{\Delta_n} \end{cases}$$

$X_1, X_2, \dots X_n$ fiind înlocuiți cu valorile lor din (3). Teorema este astfel stabilită. *Ne propunem acum a calcula efectiv maximul lui* P. Dacă în șirul de rapoarte (8), facem suma numărătorilor pe suma numitorilor și ținem seamă de relațiile de condiție date în enunț, avem dreptul să egalăm rapoartele din primul șir, cu: $\dfrac{A}{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n}$ rapoartele din al 2-lea șir, cu: $\dfrac{B}{\Delta_{p+1} + \Delta_{p+2} + \dots + \Delta_{p+q}}$ și așa mai departe, rapoartele ultimului șir, cu:

$$\frac{L}{\Delta_{n-s+1} + \Delta_{n-s+2} + \dots + \Delta_n}$$

In urmă ușor putem deduce:

$$(9)\quad \begin{cases} A_1 x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} = \dfrac{A\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2 \dots + \Delta_p}, \; A_2 x_1^{a_n+1} \dots x_n^{a_n} = \dfrac{A\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_p}, \dots A_p x_1^{a_{(p-1)n+1}} x_{nn}^{a_{pn}} = \dfrac{A\Delta_p}{\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_p} \\ B_1 x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n} = \dfrac{B\Delta_{p+1}}{\Delta_{p+1} \dots + \Delta_{q+p}}, \; B_2 x_1^{b_n+1} \dots x_n^{b_{2n}} = \dfrac{B\Delta_{p+2}}{\Delta_{p+1} + \dots + \Delta_{p+q}}, \dots B_q x_1^{a_{(q-1)n+1}} x_n^{b_{qn}} = \dfrac{B\Delta_{p+q}}{\Delta_{p+1} + \dots + \Delta_{p+q}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1 x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} = \dfrac{L\Delta_{n-s+2}}{\Delta_{n-s+1} + \Delta_{n-s+2} + \dots + \Delta_n}, \dots L_s x_1^{l_{(s-1)n+1}} \dots x_n^{l_{sn}} = \dfrac{L\Delta_n}{\Delta_{n-s+1} + \Delta_{n-s+2} + \dots + \Delta_n} \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în expresiunea produsului (1), și înlocuind și pe $u_1, u_2, \dots u_n$ cu valorile lor date de (2), găsim ușor:

$$(10)\quad \max. P = \sqrt[\Delta]{\left(\frac{A}{\Delta_1 + \dots + \Delta_p}\right)^{\Delta_1 + \dots + \Delta_p} \left(\frac{B}{\Delta_{p+1} + \dots + \Delta_{p+q}}\right)^{\Delta_{p+1} \dots + \Delta_{p+q}} \dots\dots\dots \left(\frac{L}{\Delta_{n-s+1} \dots + \Delta_n}\right)^{\Delta_{n-s+1} + \dots + \Delta_n}}$$

$$\times \sqrt[\Delta]{\left(\frac{\Delta_1}{A_1}\right)^{\Delta_1} \dots \left(\frac{\Delta_p}{A_p}\right)^{\Delta_p} \left(\frac{\Delta_{p+1}}{B_1}\right)^{\Delta_{p+1}} \dots \left(\frac{\Delta_{p+q}}{B_q}\right)^{\Delta_{p+q}} \dots \left(\frac{\Delta_{n-s+1}}{L_1}\right)^{\Delta_{n-s+1}} \left(\frac{\Delta_n}{L_s}\right)^{\Delta_n}}$$

Această formulă (10) care dă maximul lui P, o putem folosi direct în aplicațiuni.

Observare. Teorema stabilită și deci și formula (10) sunt valabile numai când $u_1, u_2, \dots u_n$ sunt pozitivi, sau $\Delta, \Delta_1, \dots \Delta_n$ au același semn:

Aplicație. Să *se calculeze maximul produsului.*

$$P = x^7 y^8 z^3 t^2$$

știind că:

$$\begin{cases} x + 2x^2 y z t = a \\ 2y + 3x^4 y^3 z^2 t = b \end{cases} \quad (a \text{ și } b, \text{ constanți}).$$

Vom folosi direct formula (10), dar pentru aceasta vom calcula întâi pe pe $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$; avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ având același semn putem aplica acum formula (10) și găsim:

$$\max.\ P=\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{b}{5}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)^4\frac{1}{3}=\frac{2}{3\times 5^5}a^2b^5$$

Pentru a controla acest rezultat, vom întrebuința acum pentru rezolvarea aceleeași probleme, metoda cunoscută a multiplicatorilor.

Vom considera deci funcțiunea:

$$x^7y^8z^3t^2+\lambda_1(x+2x^2yzt-a)+\lambda_2(2y+3x^4y^3z^2t-b),$$

și vom anula derivatele sale parțiale în raport cu x, y, z, t, la care vom alătura relațiile de condiție date, vom avea astfel:

$$(1)\quad\begin{cases}7x^6y^8z^3t^2+\lambda_1(1+4xyzt)+12\lambda_2x^3y^3z^2t=0\\8x^7y^7z^3t^2+2\lambda_1x^3zt+\lambda_2(2+9x^4y^2z^2t)=0\\3x^7y^8z^2t^2+2\lambda_1x^2yt+6\lambda_2x^4y^3zt=0\\2x^7y^8z^3t+2\lambda_1x^3yz+3\lambda_2x^4y^3z^2=0\\x+2x^2yzt=a\\2y+3x^4y^3z^2t=b\end{cases}$$

Avem un sistem de 6 ecuațiuni cu 6 necunoscute $x, y, z, t, \lambda_1, \lambda_2$. Să eliminăm întâi pe λ_1 și λ_2. Dacă simplificăm ecuația 3-a cu x^2yt și a 4-a cu x^2yz, ele devin:

$$(2)\quad\begin{cases}3x^5y^7z^2t+2\lambda_1+6\lambda_2x^2y^2z=0\\2x^5y^7z^2t+2\lambda_1+3\lambda_2x^2y^2z=0\end{cases}$$

Dacă scădem și în urmă aflăm valoarea lui $3\lambda_2$, găsim:

$$3\lambda_2=-x^3y^5zt.$$

Substituind valoarea lui $3\lambda_2$ în ecuația 2-a din (2), deducem încă:

$$2\lambda_1=-x^5y^7z^2t.$$

Multiplicăm acum prima ecuație din (1) cu 2 și ecuația 2-a cu 3, substituim apoi valorile găsite pentru $2\lambda_1$ și $3\lambda_2$ și după oarecare simplificări găsim sistemul:

$$(3)\quad\begin{cases}2xyzt=1\\6x^4y^2z^2t=1\\x+2x^2yzt=a\\2y+3x^4y^3z^2t=b.\end{cases}$$

In virtutea primelor două ecuații, ultimele două devin:

$$\begin{cases}x+x=a\\4y+y=2b\end{cases}\quad\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad\begin{cases}x=\frac{a}{2}\\y=\frac{2b}{5}\end{cases}$$

Substituind valorile lui x și y în primele două ecuațiuni, găsim:

$$\begin{cases}zt=\frac{5}{2ab}\\z^2t=\frac{50}{3a^4b^2}\end{cases}\quad\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad\begin{cases}z=\frac{20}{3a^3b}\\t=\frac{3a^2}{8}\end{cases}$$

Așa dar sistemul de valori cari face produsul P maxim sau minim, este:

$$(4)\qquad x=\frac{a}{2},\quad y=\frac{2b}{5},\quad z=\frac{20}{3a^2b},\quad t=\frac{3a^2}{8}$$

și calculând maximul lui P, găsim ca mai sus:

$$\max.\ P=\frac{2}{3\times 5^5}a^2b^5.$$

Observare. Funcțiunea P fiind privită, în virtutea relațiilor de condiție, ca o funcție de 2 variabile ar fi fost necesar și intervenția derivatelor de ordinul al 2-lea, pentru a hotărî dacă avem maxim sau minim, dar cum știm din prima metodă că e vorba de un maxim, ne-am dispensat de această cercetare. Vedem dar că prima metodă ne-a condus mai repede la rezultat și putem înțelege folosul ei în aplicațiuni.

NOTA MATEMATICA

13. — *Asupra unor însumări trigonometrice.* In „R. M, T.“, No. 7, anul III, pag. 100, d-l *Stoenescu I.*, calculează o însumare de produse de două sinusuri.

Observ că prin acelaș artificiu — dat de d-l Prof. *V. Alaci* în „R. M. T.“, an. II, No. 5, — se pot însuma produse de un sinus și un cosinus de forma:

$$(1)\qquad S=\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{u_k}{w_n}\sin\frac{v_k}{w_n}$$

unde:

$$u_k = \pi \sum_{i=0}^{m} A_i\, k^{m-i};\quad v_k = \pi \sum_{i=0}^{m} B_i\, k^{m-i}$$

$$w_n = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, n^{m-i}$$

cu condiția:

(2) $$u_{k+a} - v_{k+a} \equiv u_k + v_k$$

In adevăr:

$$S = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{u_k + v_k}{w_n} - \sin \frac{u_k - v_k}{w_n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-a} \sin \frac{u_k + v_k}{w_n} + \sum_{k=n-a+1}^{n} \sin \frac{u_k + v_k}{w_n} \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{a} \sin \frac{u_k - v_k}{w_n} - \sum_{k=a+1}^{n} \sin \frac{u_k - v_k}{w_n} \right)$$

Cum prima sumă din paranteză se distruge cu ultima, în virtutea relației (2), cum limita celei de al treilea e nulă, iar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=n-a+1}^{n} \sin \frac{u_k + v_k}{w_n} = \frac{1}{2}\, a \sin \frac{(A_0 + B_0)}{\alpha_0} \pi,$$

rezultă:

(3) $$S = \frac{a}{2} \sin \frac{A_0 + B_0}{\alpha_0} \pi.$$

Relația (2) mai poate fi scrisă după transformări:

$$\sum_{i=0}^{m} [(A_0 - B_0)\, C_m^i\, a^i + (A_1 - B_1)\, C_{m-1}^{i-1}\, a^{i-1} + \ldots$$

$$\ldots + (A_i - B_i)]\, k^{m-i} \equiv \sum_{i=0}^{m} (A_i + B_i)\, k^{m-i}$$

Prin identificare pentru $i=0$ și $i=1$ se obține (Vezi articolul d-lui Stoenescu).

$$B_0 = 0;\quad a = \frac{2 B_1}{m A_0}$$

Relația (3) devine:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=i}^{n} \cos \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{v_k}{w_n} = \frac{B_1}{m A_0} \sin \frac{A_0}{\alpha_0} \pi.$$

Prin un procedeu analog cu cel din articolul citat se poate obținea:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{v_k}{w_n} \prod_{i=1}^{p} \cos \frac{\varphi_i\, v_k}{w_n} \right) = \frac{B_1}{m A_0} \sin \frac{A_0}{\alpha_0} \pi,$$

unde φ_i e o constantă, iar p un număr întreg și pozitiv oarecare.

Observare. In mod absolut analog se pot stabili pentru funcțiunile hiperbolice corespunzătoare relațiunile:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sh} \frac{u_k}{w_n} \operatorname{sh} \frac{v_k}{w_n} \prod_{i=1}^{p} \operatorname{ch} \frac{\varphi_i\, v_k}{w_n} \right) = \frac{2 B_1}{m A_0} \operatorname{sh}^2 \frac{A_0}{2 \alpha_0} \pi$$

și

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{ch} \frac{u_k}{w_n} \operatorname{sh} \frac{v_k}{w_n} \prod_{i=1}^{p} \operatorname{ch} \frac{\varphi_i\, v_k}{w_n} \right) = \frac{B_1}{m A_0} \operatorname{sh} \frac{A_0}{2 \alpha_0} \varphi$$

notațiile și condițiile fiind aceleași ca mai sus.

REMUS B. RADULET

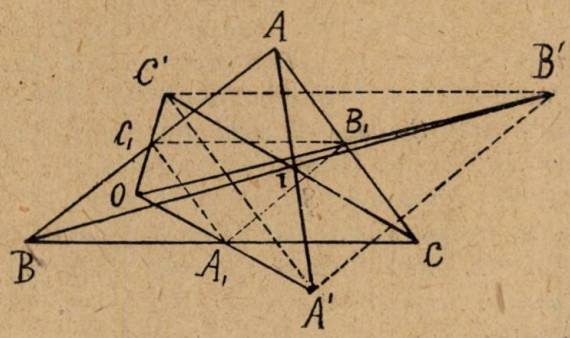
BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXIX, No. 12, August 1924. † *Ion D. Teodor.* Asupra unei teoreme a lui *Hermite*, de *N. Abramescu.* O proprietate a indicatorilor de ordin superior, de Căpitan *I. Linteș.*

PROBLEME REZOLVATE

263.—*Fie* O *un punct în planul unui triunghiu* A B C. *Notăm cu* A′, B′, C′ *simetricele lui* O *față de mijloacele laturilor triunghiului. Să se demonstreze că* A A′, B B′, C C′ *sunt concurente.*

I. COSEREANU



Prima soluție dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan N. Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Hirsch Ionel* (Șc. de Aplicație, București), *Iliescu D. Emilian* (lic. Târgoviște), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit., Timișoara), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stănescu A. Niculae* (Șc. Polit., Timișoara), *Ștefănescu Emil*, *Sușelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vlăduțiu Sabin* (lic. M-rea Dealu) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

Dreptele OA' și BC înjumătățindu-se, figura $BOCA'$ este un paralelogram, pentru un motiv analog și $AOCB'$ și $AOBC'$ sunt paralelograme. Rezultă atunci că $OB \# A'C \# AC'$, deci patrulaterul $ACA'C'$ este un paralelogram și diagonala CC' trece prin mijlocul lui AA'. In acelaș timp fiindcă $OA \# B'C \# BC'$ rezultă că și $BCB'C'$ este un paralelogram și diagonala BB' trece prin mijlocul lui AA'. Dreptele AA', BB', CC' sunt deci concurente.

Soluția 2-a dată de d-nii: *Alexandrescu B. Nicolae* (Ploești), *Bălean G.* (lic. Timișoara), *Cândea Gh. Ioan* (lic. Sibiu), *Ciută Gavril* (Timișoara), *Cocorandu M* (Șc. Polit., Timișoara), *Comănescu Al.-Bălteni* (Olt), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *David I. Ioan* (Buzău), *Davidsohn Mișu* (Seminarul Pedagogic, București), *Epure Ștefan* (Buzău), *Georgescu C. Ioan* (liceul Pitești), *Gheorghiu C.* (Comănești), *Katz Pincu* (Galați), *Lepădatu I. Victor* (liceul Internat, Iași), *Mușta Șt.* (Timișoara), *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Ploești), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (lic. (lic. Mihai-Viteazul, București). *Rabinovici Samuil* (Cetatea-Albă), *Șerbănescu Ovid* (lic. Constanța), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Stambuleanu Adrian* (Șc. Polit. Timișoara), *Ștefulescu I. Ghiță* (Timișoara), *Tăraș Vasile* (liceul Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Udrisky Traian* (lic. Arad) și *Ursu Victor* (Șc. Polit., Ti-Timișoara).

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC. In triunghiurile ABC și $OA'B'$, A_1B_1 unind mijloacele a două laturi ale lor, este paralelă și egală cu a treia latură, rezultă atunci că $AB \# A'B'$, că prin urmare patrulaterul $ABA'B'$ este un paralelogram și deci diagonala AA' trece prin mijlocul lui BB'. In același mod se arată că $BC \# B'C'$, că prin urmare patrulaterul $BCB'C'$ este un paralelogram și CC' trece prin mijlocul BB'. Dreptele AA', BB' și $C'C$ sunt deci concurente.

Soluția 3-a dată de de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad) și *Gradin I. Giorgio* (lic. Câmpina).

Observăm că $BC = B'C'$ ca fiind dublul lui B_1C_1, tot așa $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sunt deci omotetice, raportul de omotetie fiind 1. Atunci după o teoremă cunoscută, dreptele care unesc punctele omoloage în figuri omotetice sunt concurente, deci AA', BB', CC' sunt concurente.

Soluție analitică dată de d-nii: *Berdan C-tin* (Bârlad), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Șerban I. Tiberiu* (lic. Brașov), *Smigelschi Octavian* (Șc. Polit., Timișoara), *Septilici M. Raul* (Șc. de Artilerie), *Tomescu N. Gheorghe* (Șc. de Artilerie) și *Urzică Aurel* (lic. Deva).

Vom lua un sistem de axe oblice, anume BC x^{ilor} și AB axa y^{cilor}, B origina, atunci coordonatele A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, A', B', C' sunt:

$$A(0, c),\ B(0, 0),\ C(a, 0),\ A_1\left(\frac{a}{2}, 0\right),\ B_1\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right),$$

$$C_1\left(0, \frac{c}{2}\right),\ M(\alpha, \beta),\ A'(a-\alpha, -\beta),$$

$$B'(a-\alpha, c-\beta),\ C'(-\alpha, c-\beta).$$

Ecuațiile dreptelor AA', BB', CC' sunt deci

$$(1)\quad \begin{cases} (a-\alpha)y + (c+\beta)x - c(a-\alpha) = 0 \\ (a-\alpha)y - (c-\beta)x = 0 \\ (a+\alpha)y + (c-\beta)x - a(c-\beta) = 0. \end{cases}$$

Pentruca AA'. BB', CC' să fie concurente, trebuie să dovedim că sistemul (1) este compatibil. In adevăr multiplicând prima ecuație cu $a(c-\beta)$ și ultima cu $c(a-\alpha)$ și scăzându-le găsim:

$$[a(a-\alpha)(c-\beta)-c(a^2-\alpha^2)]y$$
$$+[a(c^2-\beta^2)-c(a-\alpha)(c-\beta)]x=0$$

$$\overset{*}{**} \quad (a-\alpha)(a\beta+\alpha c)y-(c-\beta)(a\beta+\alpha c)x=0,$$

sau: $$(a-\alpha)y-(c-\beta)x=0.$$

care este tocmai ecuația 2-a a sistemului (1). Sistemul (1) este deci compatibil și deci dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente.

Generalizare dată de d-nii: *Gradin I. Giorgio* (lic. Câmpina) și *Udrisky Traian* (lic. Arad).

Dacă unim un puuct O *din planul unui triunghiu cu mijloacele* A_1, B_1, C_1 *a laturilor și luăm în prelungirile lor* A_1A', B_1B', C_1C' *astfel ca:*

$$\frac{OA_1}{A_1A'}=\frac{OB_1}{B_1B'}=\frac{OC_1}{C_1C'}=K,$$

atunci dreptele AA′, BB′, CC′ *sunt concurente.* Vom observa pentru aceasta că triunghiul $A_1B_1C_1$ este asemenea cu ABC și A′B′C′, deci ABC și A′B′C′ sunt omotetice și dreptele care unesc punctele omoloage sunt concurente, deci AA′, BB′, CC′ sunt concurente.

Observări. 1) Punctul O evident poate fi și exterior triunghiului ABC și chiar în spațiu, demonstrațiile se mențin.

2. Punctul I de întâlnire a dreptelor AA′, BB′, CC′ este mijlocul lor.

3. Triunghiurile ABC și A′B′C′ sunt egale.

4. D l *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu) se întreabă: *Care este locul lui* I *când punctul* O *rămâne în interiorul triunghiului* ABC *sau pe conturul lui ?* D-sa observă că dacă O se confundă cu B, I e la mijlocul lui AC; dacă O se confundă cu C, I e la mijlocul lui AB. Dacă O se mișcă pe laturile triunghiului ABC, I se mișcă pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$. Când O se află în planul triunghiului, I se află in interiorul triunghiului $A_1B_1C_1$. Locul lui I este deci interiorul triunghiului $A_1B_1C_1$, inclusiv laturile lui.

5. D-nii: *Popeea Ovidiu* (Chișinău), *Udrisky Traian* (lic. Arad) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu), arată că problema propusă se poate deduce din problema mai generală No. 2949 din „G. M.“, an. XXVIII, pag. 149. A se vedea și „Jurnal Matematic“ N-rile 3 și 4, niște generalizări date de d-l *T. Popovici.*

6. Au dat soluțiuni analitice în cazuri cu totul particulare și d-nii: *I. N. Georgescu-Val* (Giurgiu) și *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. București).

7. Câțiva corespondenți au încercat să soluționeze problema folosind teoremele lui *Menelaus* și *Cevà*, dar au considerat dela început că dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente adică s'au sprijinit tocmai pe adevărul care trebuia stabilit.

8. D-l *Berdan C.* a dat o generalizare ce se îndepărtează mai mult de enunț, de aceia n'o mai relevăm.

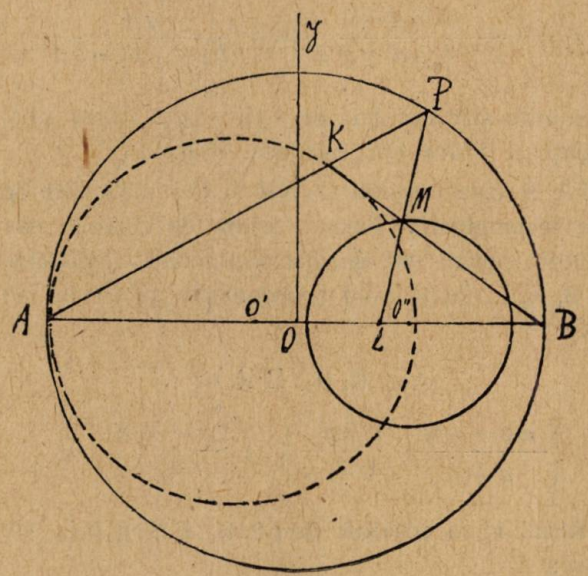
9. D-l *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), observă că medianele triunghiurilor ABC, OAA′, OBB′, OCC′ sunt concurente, și prin punctul de întâlnire trec și dreptele lui *Euler* ale acestor triunghiuri.

283. — *Se consideră un punct* P *mobil pe cercul* O *și un diametru fix* AB. *Care este locul geometric al intersecției* M *al dreptelor* KB *și* LP, K *și* L *fiind două puncte situate respectiv pe* AP *și* AB, *astfel ca:*

$$\frac{KA}{KP}=\frac{a}{b} \text{ și } \frac{LA}{LB}=\frac{c}{d}$$

I. N. ȘERBANESCU

Soluție geometrică dată de d-l: *Percea Viorel* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara).



Punctul A fiind fix, iar P descriind cercul O, punctul K care este astfel că: $\frac{KA}{KP}=\frac{a}{b}=$ constant, va descrie un cerc omotetic cu cercul O. Acel cerc trece prin A, are centrul O′ pe AB şi raza sa, $r=R\frac{a}{a+b}$, R fiind raza cercului O. Acum considerăm triunghiul AKB tăiat de transversala PL; teorema lui *Menelaus* ne permite a scri:

$$(1)\qquad \frac{MB}{MK}\cdot\frac{PK}{PA}\cdot\frac{LA}{LB}=1.$$

Dar din relaţia dată:

$$\frac{KA}{KP}=\frac{a}{b},\ \text{deducem}\ \frac{KP}{AP}=\frac{b}{a+b}\ \text{sau:}$$

$$(2)\ \frac{PK}{PA}=\frac{b}{a+b},\ \text{avem încă dat:}\ (3)\ \frac{LA}{LB}=\frac{c}{d}$$

Inlocuind în (1) rapoartele $\frac{PK}{PA}$, $\frac{LA}{LB}$ prin valorile lor date de relaţiile (2) şi (3), deducem:

$$(4)\qquad \frac{MB}{MK}=\frac{d(a+b)}{bc}=\text{constant}.$$

Cum punctul B e fix, iar K descrie un cerc, punctul M care este astfel că: $\frac{MB}{MK}=$ constant, va descrie un cerc cu centru O″ pe AB şi cu raza:

$$r'=r\frac{d(a+b)}{bc+ad+bd}=R\frac{ad}{bc+ad+bd}$$

Soluţie analitică dată de d-nii: *Katz Pincu* (abs. Galaţi) şi *Silion Gh. Ion* (abs. Braşov).

Fie R raza cercului O, AB şi Oy un sistem de axe rectangulare. Ţinând seamă de relaţiile din ipoteză, putem scri imediat coordonatele punctelor A, B, K, L. (α, β) fiind coordonatele punctului P, avem:

$$A(-R, 0),\ B(R, 0),$$

$$\left(\frac{a\alpha-bR}{a+b},\ \frac{a\beta}{a+b}\right),\ L\left(\frac{(c-d)R}{c+d},\ 0\right)$$

Scrim acum ecuaţiile dreptelor KB şi PL, ele sunt:

$$y=\frac{\frac{a\beta}{a+b}}{\frac{a\alpha-bR}{a+b}-R}(x-R),$$

$$y=\frac{\beta}{\alpha-\frac{(c-d)R}{c+d}}\left[x-\frac{(c-d)R}{c+d}\right]$$

$$(1)\qquad \frac{y}{\beta}=\frac{a(x-R)}{a\alpha-bR-(a+b)R},$$

$$\frac{y}{\beta}=\frac{(c+d)x-(c-d)R}{(c+d)\alpha-(c-d)R}$$

Primii membrii fiind egali deducem:

$$\frac{a(x-R)}{a\alpha-(a+2b)R}=\frac{(c+d)x-(c-d)R}{(c+d)\alpha-(c-d)R}$$

$$(2)\qquad \alpha=\frac{(bc+ad+bd)x+b(d-c)R}{ad}$$

Inlocuind pe α în prima relaţie din (1). deducem:

$$(3)\qquad \beta=\frac{(bc+ad+bd)y}{ad}$$

(α, β) fiind coordonatele punctului variabil P pe cercul O, satisfac ecuaţia cercului, adică:

$$\alpha^2+\beta^2=R^2.$$

Substituind aci valorile α, β date de (2) şi (3), găsim:

$$x^2+y^2+\frac{2(d-c)bR}{ac+ad+bd}x+\frac{R^2[(d-c)-a^2d^2]}{(bc+ad+bd)^2}=0,$$

care este ecuaţia locului punctului M.

Vedem dar că locul punctului M este un cerc cu centru O″, pe AB, de coordonate:

$$O''\left(-\frac{(d-c)bR}{bc+ad+bd},\ 0\right)$$

şi cu raza:

$$r^2=\frac{(d-c)^2b^2R^2}{(bc+ad+bd)^2}-\frac{R^2[(d-c)^2b^2-a^2d^2]}{(bc+ad+bd)^2}$$

adică: $$r=R\frac{ad}{bc+ad+bd}$$

285. — *O trăsură merge dela* A *la* B *cu 8 km. pe oră; după 10 km. se întâlneşte cu un automobil care venea din* B, *de unde plecase cu 15 minute mai târziu. După o oră dela această întâlnire, automobilul — care fusese în* A *unde a trebuit să stea 20 de minute şi care întorcându-se în* B *— ajunge din nou trăsura. Se cere distanţa* AB.

CAP. I. LINTES

Fie M locul de întâlnire, atunci $AM = 10$ km., deci trăsura a făcut 1 oră şi 15 minute. Automobilul a făcut $\overline{BM}$ într'o oră. Apoi $\overline{MA}$ îl face în $\frac{10}{v}$ ore — v viteza automobilului, — stă 20 de minute, adică $\frac{1}{3}$ din oră, în A şi pleacă înapoi ajungând trăsura în M'. Dar $\overline{MM'} = 8$ km., căci o oră a făcut trăsura şi atunci avem:

$$\frac{10}{v} + \frac{1}{3} + \frac{18}{v} = 1$$

$$v = 42 \text{ km./oră},$$

iar: $\overline{AB} = 52$ km.

Soluţii bune date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* [lic. Naţional, Iaşi], *Angelescu N. Traian* [lic. Giurgiu], *Andrieşescu Gh.* [Dorohoi], *Antoniu S. Simion* [lic. M-rea Dealu], *Barbu Alexandru* [lic. Tg.-Mureş], *Başta D. Gh.* [lic. Tg.-Mureş], *Bălean G.* [lic. Timişoara], *Damşescu Aurel* [Şc. Cond. Cluj], *Bărglăzan Aurel* [Timişoara], *Beju O. Traian* [lic. Arad], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bercovici A Emil* [student], *Beşchea Nicolae* [lic. Braşov], *Blumenfeld M. David* [lic. Botoşani], *Boian Romulus* [lic. Tg.-Mureş], *Boju Şt. Rosetel* [lic. Timişoara], *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Braieşter I. Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Brudo Nicolae* [lic. Făgăraş], *Brüll M. Leon* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Butu I. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Calmanovici Savu* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Cantacuzino I. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Ciorănescu I. C-tin* [M-rea Dealu], *Cocorandu M.* [Timişoara], *Comănescu-Bălteni* [Olt], *Constantinescu Nicolae* [Sem. Pedag. Bucureşti], *Critz Mendel* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Cruşoveanu P. Ion* [lic. Tg.-Mureş], *Diaconu Gh.* [lic. Tg.-Mureş], *Diaconu B. Marin* [lic. M-rea Dealu], *Dumitriu M. Mihai* [lic. M-rea Dealu], *Dumitrescu Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Dumitrescu Gh. Marin* [lic. Craiova], *Dumitrescu C. Nicolae* [lic. Piteşti], *Dumitrescu Nae Savu* [lic. Tg.-Mureş], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iaşi], *Dospinoiu N.* [Cond. de L. P. Bucureşti], *Dragomir Eugen* [lic. Tg.-Mureş], *Feldstein Eva* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Flickstein J.* [Cernăuţi], *Fischel Haimovici, Gataianţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Gârleşteanu Mihail* [lic. Timişoara], *Georgescu C. Ioan* [lic. Piteşti], *I. N. Georgescu-Val.* [Dadilov], *Ghelber Mauriciu* [Sem. Ped. Bucureşti], *Gheorghiu Gh. Olimpia* [Bucureşti], *Ghilezan Moise* [Timişoara], *Goldstein N.* [Timişoara], *Goldstein Marcel* [Sem. Ped. Bucureşti], *Golopenţia Antoniu* [Timişoara], *Grabovscki Eugen* [lic. Orhei], *Gradin I. Gheorghe* [lic. Câmpina], *Grigorescu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Grofşoreanu I. Gheorghe* [lic. Arad], *Gulian Emil* [lic. Giurgiu]. *Haimovici D. Mendel* [lic. Naţional, Iaşi], *Herşcovici Emanoil* [lic. Galaţi], *Hirsch A. Ioan* [Sem. Pedagogic, Bucureşti], *Hotăran Teodor, Iliescu-Ciorăşti, Iliescu Şt. Dima* [lic. Tg.-Mureş], *Iliescu Dan Grigore* [lic. Tg.-Mureş], *Iliescu M.* [lic. M-rea Dealu], *Iliescu Th. Theodor* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Iliescu Şt. Virgil* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu T. C-tin Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Jean* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Ionescu I. Nicolae* [Piteşti], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Ioniţă M. Ion* [Şc. de Artilerie, Râsnov], *Isaiia Niculescu, Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Kassargian A.* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Katz Isac* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Katz Pincu* [Galaţi], *Katz S.* [lic. Botoşani], *Lăzărescu M. Vasile* [lic. Giurgiu], *Lindenberg Lyonnel* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu], *Marini Paul* [student, Cluj], *Marinescu I. Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Milculescu G. D-tru* [lic. M-rea Dealu], *Mircea Pol.* [lic. Tg.-Jiu], *Mironovici Virginia* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Mitescu G. Dem.-Remdecth* [lic. Tg.-Mureş], *Miu M. Ion* [lic. Caracal], *Murineanu Toma* [lic. M-rea Dealu], *Negretzu Florea* (Piteşti], *Niculescu C. Grigore* [lic. M-rea Dealu], *Oana Ioan* [lic. Făgăraş], *Ouiţiu Florin* [Braşov], *Pantazi G. D-tru* [lic. Brăila], *Partenie Iancu* [lic. Deva], *Pascu D.* [lic. Braşov], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Pârvulescu Titus* [lic. M-rea Dealu], *Percea Viorel* [lic. Timişoara], *Petrescu P. Gheorghe* [lic. Ploeşti], *Pietraru C. Vintilă* [lic. Braşov], *Popescu N. Argentoaia* [Şc. de Artilerie], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popescu Ep.* [lic. Galaţi], *Popescu Gh. Florian* [lic. Giurgiu], *Popescu Dem. Marin*]lic. Giurgiu], *Popescu N. Nic.* [lic. Câmpina], *Popescu C. Victor* [lic. Câmpulung. Bucovina], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Popp I. Emilian* [lic. M-rea Dealu], *Popper Ervin* [lic. Timişoara], *Porumbaru I. Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Purdilă C-tin* [lic. Braşov], *Rauchbach Artur* [Gura Humorului, Bucovina], *Rauchbach Sidonie* [Gura Humorului, Bucovina], *Râmniceanu Radu* [Tg.-Jiu], *Reichenmann David* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Rădulescu P. Marin* [lic. Giurgiu], *Rădulescu P. Stelian* [Giurgiu], *Rădulescu Titu* [lic. M-rea Dealu], *Răduleţ B. Remus* [Şc. Polit., Timişoara], *Rosu Alexandru* [lic. M-rea Dealu], *Rudich Leon* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Săbău Hortensia* [lic. Arad], *Şerban I. Tiberiu* [lic. Braşov], *Scripcă C. Laur* [lic. Naţional Iaşi], *Silion Gh. Ion* [lic. Braşov], *Simionescu Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Solacolu C. Şerban* [lic. Matei-Basarab, Bucureşti], *Stamatescu I. Valeriu* [Sem. Ped. Bucureşti], *Stamatiu I. Mihail* [Piteşti], *Stambuleanu Adrian* [Şc. Polit. Timişoara], *Stănciulescu George* [Piteşti], *Stănculescu I. C-tin* [Giurgiu], *Ştefulescu Ghica* [Timişoara], *Stroescu Gheorghe* [lic. Tg.-Mureş], *Şuşelescu Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Tăraş Vasile* [Braşov], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Teodorescu M. D-tru* [lic. M-rea Dealu], *Teodorescu St. I.* [student, Bucureşti], *Teodorescu Niculae* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Tomescu N. Gheorghe* [Şc. de Artilerie], *Ţăţăreanu P.* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Ursescu C. Gheorghe* [lic. Galaţi], *Vaida M.* [lic. Caransebeş], *Vasiliu C. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Vasiliu C. Ioan* [lic. Tg.-Mureş], *Vasiliu Gh. Cheorghe* [lic. Diaconovici-Loga, Timişoara], *Vasiliu Gh. Niculai* [lic. Focşani], *Vasilescu O. Mircea* [lic. Giurgiu], *Vătăşan G. Ovid* [Braşov], *Vişoianu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Vlădeanu Tiberiu* [lic. M-rea Dealu], *Vlăduţu I. Sabin* [lic. M-rea Dealu], *Wetter Anna* [lic. Câmpulung, Bucovina] şi *Zoican A. A.*

300. — *Să se demonstreze că în orice triunghiu există relaţiunea:*

$$\frac{a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}}{(p-a)\sin^2\frac{A}{2}+(p-b)\sin^2\frac{B}{2}+(p-c)\sin^2\frac{C}{2}}=2\left(\frac{R}{r}+1\right)$$

M. BOBARNAC

Insemnând cu E primul membru al relaţiei cerute şi folosind formulele cunoscute:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2},\ \text{etc.};\ \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},\ \text{etc.};\ a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2s}{R},$$

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

putem scri succesiv:

$$E=\frac{a(1+\cos A)+b(1+\cos B)+c(1+\cos C)}{2(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)}$$

$$=\frac{abc[(a+b+c)+(a\cos A+b\cos B+c\cos C)]}{2(p-a)(p-b)(p-c)(a+b+c)}$$

$$=\frac{abc\left(2p+\frac{2s}{R}\right)}{4p(p-a)(p-b(p-c)}=\frac{abc(pR+s)}{2Rs^2}$$

Cum ştim încă că: $s=pr$, $abc=4sR$, mai putem scri:

$$E=\frac{4Rs(pR+s)}{2Rs}=\frac{2(pR+pr)}{pr}=2\left(\frac{R}{r}+1\right)$$

Relaţiunea dată este astfel stabilită.

Soluţie dată de d-nii: *Alexandrescu Nicolae* (Ploeşti), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Apăteanu Camil* (Arad), *Atanasiu I. D-tru* (lic. Arad), *Bârglăzan Aurel* (Şc. Polit. Timişoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (Student), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Boju Rosetel* (lic. Timişoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gr. Ion*, *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Coşniţă Virgil* (lic. Bârlad), *Cristea Aurel* (lic. Focşani), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *David I. Ioan* (Buzău), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Fântâneanu Ion*, *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. Bucureşti), *Ghinicescu I.* (lic. Internat, Iaşi), *Goldstein L. M.*, *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grofşoreanu I. Gheorghe*, *Gulian Emil* (lic Giurgiu), *Herşcovici Emanuil* (lic. Galaţi), *Iliescu Petre* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Pincu* (Şc. Polit. Bucureşti), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Mihăilescu T. Romeo* (R.-Vâlcea), *Mirescu A. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Mitran Şt. Grigorie* (lic. Craiova), *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Pârvulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rămniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru*, *Stamatiu Mihail* (Student), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănculescn C-tin* (Giurgiu), *Stănescu A. Nicolae* (Şc. Polit. Timişoara), *Stanciu Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Stoenescu C. Ioan* (lic. Galaţi), *Şuşelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. Dumitru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tunaru R. Traian* (Craiova), *Ţirică Ştefan* (lic. Arad), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Vasiliescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vişioianu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vlaţiu Laurenţiu* (lic. Constanţa) *şi Vlăduţu Sabin* (lic. M-rea Dealu).

306. — *Să se stabilească identitatea:*

$$n+8\sum_{k=2}^{n}(k-1)(n-k+1)=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

V. ALACI.

Observăm că primul membru se mai poate scri:

$$(1)\quad n+8\sum_{k=2}^{n}(k-1)(n-k+1)=n+8n\sum_{k=2}^{n}(k-1)-8\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2.$$

Folosind relaţiile cunoscute:

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1}{6}$$

relaţia (1) devine succesiv:

$$n+8\sum_{k=2}^{n}(k-1)(n-k+1)=$$

$$n+4n^2(n-1)-\frac{4(n-1)n(2n-1)}{3}=$$

$$\frac{n(3+12n^2-12n-8n^2+8n+4n-4)}{3}=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluție dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Bernardis N. Berardo* (lic. R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boju Rosetel* (lic. Timișoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Botis E. Virgil* (Arad), *Căldăraru Leon* (lic. Șincai, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. T.-Jiu), *David I. Ioan* (Buzău), *David Gheorghe* (lic. Timișoara), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Șc. Politechnică București), *Mihăilescu Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Pamula A. Alexandru* (lic. Botoșani), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Silion Gh Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatescu I. Val.* (Sem. Ped. București), *Stamatiu I. Mihail* (Șc. Polit. București), *Stănciulescu A. George* (Pitești), *Ștefănescu Emil* (București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București) *și Vătășan G. Ovid* (Șc. Polit. Timișoara).

Observare. D-l *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), a dat o altă soluție, folosind identitatea:

$$\sum_{k=2}^{n}\left[f(k+1)-f(k)\right]=f(n+1)-f(1),$$

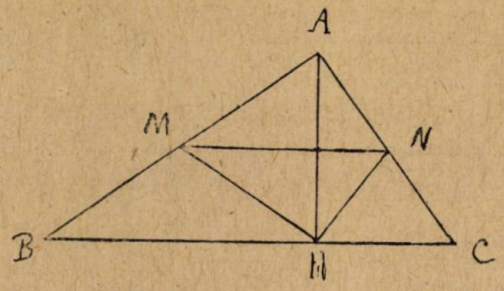
luând pentru $f(x)$, polinomul:

$$f(x)=-\frac{8x^3}{3}+4(n+3)x^3-\frac{(36n+52)x}{3}$$

324.—*In triunghiul dreptunghic* ABC *se duce prin mijlocul înălțimei* AH *o paralelă la ipotenuza* BC, *care întâlnește catetele* AB *și* AC *în* M *și* N. *Să se stabilească relația;*

$$MH-NH=\frac{BC(BH-HC)}{4(MH+NH)}$$

SIMIONESCU D. GH.



Dreapta MN trecând prin mijlocul înălțimei AH a triunghiului ABC și fiind paralelă cu BC, împarte și laturile AB și AC în părți egale.

De altă parte știm că în orice triunghiu dreptunghiu mediana este egală cu jumătatea ipotenuzei, atunci în triunghiurile dreptunghice ABH și AHC putem scri:

(1) $AB=2AM=2MH,\quad AC=2AN=2NH.$

Tot în triunghiurile AHB și AHC, putem scri:

$$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2,\quad \overline{AH}^2=\overline{AC}^2-\overline{HC}^2$$

Primii membri fiind egali, rezultă:

$$\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=\overline{AC}^2-\overline{HC}^2$$

(2) $$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BH}^2-\overline{HC}^2$$

In virtutea relațiilor (1), putem scri încă:

$$4\overline{MH}^2-4\overline{NH}^2=(BH+HC)(BH-HC),$$

sau:

$$4(MH+NH)(MH-NH)=BC(BH-HC)$$

$$MN-NH=\frac{BC(BH-HC)}{4(MH+NH)},$$

ceiace trebuia stabilit.

Observare. Fiindcă nu am folosit de loc faptul că triunghiu ABC este dreptunghiu, rezultă că relațiunea din enunț se menține pentru orice triunnghiu.

Soluție dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beju O. Traian* (lic. Arad). *Berardo N. Bernardis* (lic. R.-Sărat), *Boju Rosetel* (Timișoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braester I. Otto* (lic. Național, Iași), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cligher A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *Constantinescu N. Nicolae* (Sem, Pedag. București), *Constantinescu Venus* (Șc. Polit. Timi-

şoara), *Cormanschi I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Damşescu Aurel* (Şc. de Conductori, Cluj), *David I. Ion* (Buzău), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drogeanu Niculae* (Sem. Pedag. Bucureşti), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Flicstein J.* (student, Cernăuţi), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *Ghelber Mauriciu* (Sem, Pedag. Bucureşti), *Goldstein N.* (Şc. Poilt, Timişoara), *Grigore T. V.* (Tg.-Jiu), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Herşcovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bcucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Şt. Dima* (lic. Tg.-Mureş), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Liuba C.* (lic. Timişoara), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Lupan Em.* (Sem. Pedag. Iaşi), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Mihăileanu C. Grigore* (lic. Oradia-Mare), *Mihailescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Mitran St. Grigore* (lic. Craiova), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara). *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rămniceanu L. Radu* (Tg.-Jiu), *Roşca I. Ion* (lic. Tg.-Jiu), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi). *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Pedag. Bucureşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ştefulescu I.* (Timişoara), *Şuşelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tunaru Traian* (Craiova), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit., Timişoara), *Vlaţiu L. Laurenţiu* (Constanţa), şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

PROBLEME PROPUSE

—

378. – Să se găsească patratele de trei cifre, astfel ca câtul diviziunii prin trei al produsului numărului format cu primele două cifre prin diferenţa dintre numărul de trei cifre şi răsturnatul său, să fie patrat perfect.

I. Gh. Silion

376. — Se cer patratele de n cifre, astfel ca ultimele $n-1$ cifre să fie identice.

Miu M. Ioan

380. — Se consideră un patrulater A B C D. Fie A_1, C_1 proecţiile lui A şi C pe B D şi B_1, D_1 proecţiile lui B şi D pe A C; fie A_2, B_2, C_2, D_2 respectiv mijloacele laturilor A B, B C, C D şi D A. Să se calculeze perimetrul octogonului $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 D_1 D_2$ în funcţie de perimetrul patrulaterului A B C D.

Nicolae Gh. Botea

381.* — Să se studieze variaţia unghiului B A C când A se mişcă pe o dreaptă dată din planul A B C, punctele B şi C fiind fixe. Discuţie.

V. Valcovici

382.* — Se dă triunghiul A B C, înălţimea A A′ şi un punct P pe această înălţime. Fie P_1 şi P_2 proecţiile lui P pe laturile A B şi A C. Prin A′ se duce o paralelă cu $P_1 P_2$, care taie laturile A B şi A C în M şi N. 1. Să se demonstreze că M N, este dreapta lui *Simson* a punctului A″ intersecţia lui A A′ cu cercul circumscris triunghiului A B C. 2. Să se calculeze lungimea lui M N în funcţie de elementele triunghiului A B C.

V. Alaci

383. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\frac{\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

V. Cosnita.

384. — Se dau ecuaţiile:

$$x^2+px+q=0,\quad x^2+p'x+q'=0$$

cu rădăcinele respectiv x_1, x_2; x'_1, x'_2.

Să se formeze ecuaţia:

$$X^4+aX^3+bX^2+cX+d=0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1=x_1x'_1,\ X_2=x_1x'_2,\ X_3=x_2x'_1,\ X_4=x_2x'_2.$$

Emil Stefanescu

385. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=1}^{11}\left(\sec^6\frac{k\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{k\pi}{24}\right)=411924\frac{20}{27}$$

Pincu Katz

INFORMATIUNI

A apărut Culegere de exerciţii şi Probleme de Algebră Elementară, partea I, de I. Dumitriu, profesor Arad. Numărul mare de exerciţii şi diversitatea lor poate fi de mare folos tuturor celor ce vor să câştige îndemânarea calculului algebric.

Comenzile se pot face la R. M. T. în schimbul a 40 lei.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Abonamentul pe anul IV-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 OCTOMBRIE 1924 No. 8

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 EI PE AN

CUPRINSUL

1. V. VALCOVICI. REGIMUL DE LUCRU MAXIM LA BANDA HIDRAULICA.
2. AL. V. NICULESCU. O PROBLEMA DE GEOMETRIE CU PRIVIRI ASUPRA CONICILOR.
3. NOTE MATEMATICE, 14.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 160, 215, 216, 221. 223, 303, 262, 322
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că dela 1 Octombrie, fac parte din comitetul de redacție al revistei și d-nii: **Lt.-Colonel Dragalina Corneliu,** București și **Bădulescu Vasile,** profesor lic. Șincai, București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL IV. — No. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1924

BIBLIOT... ASTRA" SIBIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

REGIMUL DE LUCRU MAXIM LA BANDA HIDRAULICA

de V. VALCOVICI

Se ştie câtă importanţă economică poate avea cursul repede al unei ape pentru punerea în mişcare a roţilor motoare. Cu o cheltuială de instalaţie foarte mică şi cu o cheltuială de energie egală cu zero se poate obţine câte odată un lucru mecanic util considerabil.

Principiul este foarte simplu. La o roată cu o rază orizontală fixă şi normală cursului apei, se adaptează nişte lopeţi radiale. Roata se scufundă parţial (în orice caz mai puţin de jumătate) în apă. Lopeţile udate sunt mânate de curentul apei toate în acelaşi sens şi astfel naşte un cuplu motor asupra roţii care se întrebuinţează apoi pentru a pune în mişcare o moară, o pompă, etc.

Uneori se întrebuinţează în locul unei roţi, o întreagă bandă fără sfârşit trecută pe după doi cilindri, aşa fel încât jumătatea inferioară a bandei să fie în apă iar cea superioară în aer. De bandă sunt fixate iarăşi în mod radial, lopeţile care sunt luate pe jumătatea inferioară a bandei, de curentul apei. Se obţine astfel o mişcare în aer a jumătăţei superioare care este capabilă să producă un lucru mecanic. Imi propun să găsesc condiţiunile optime de lucru ale maşinei acesteia pentru lucrul mecanic maxim.

Fie v viteza lopeţilor faţă de maluri şi v_0 viteza apei faţă de mal. Se înţelege că dacă v este egal cu v_0 atunci lucrul mecanic al bandei este zero căci forţa ei este zero. De asemenea dacă v ar fi nul, lucrul mecanic ar fi nul din cauză că deplasarea este zero. Intre aceste două extreme, lucrul mecanic ia valori pozitive, atingând cel puţin odată o valoare maximă. Care este valoarea lui v corespunzătoare maximului?

Odată aflată această valoare vom putea şti cum trebue să încărcăm semi-banda superioară pentru a avea condiţiuni optime de funcţionare.

Viteza relativă a unei lopeţi faţă de curentul de apă este egală cu $v_0 - v$. Dacă însemnăm cu S suprafaţa udată a acestei lopeţi atunci se ştie că presiunea fluidului pe lopată este egală cu:

$$k\,S\,(v_0 - v)^2$$

unde k înseamnă un coeficient independent de viteză (cel puţin într'o primă aproximaţie care ne este nouă suficientă pentru evaluarea căutată). Lucrul mecanic al acestei forţe raportat la unitatea de timp este evident egal cu:

$$k\,S\,(v_0 - v)^2\,v,$$

de oarece viteza punctului de aplicaţie al forţei faţă de maluri este egală cu v. Presupunând că avem la un moment dat n lopeţi identice udate, vom obţine pentru lucrul mecanic căutat, expresia:

$$L = n\,k\,S\,(v_0 - v)^2\,v.$$

Valoarea ei maximă se află anulându-i derivata în raport cu v ceiace ne dă:

$$(v_0 - v)(v_0 - 3\,v) = 0.$$

Eliminând soluţia $v = v_0$ care ne dă altceva, căpătăm:

$$v = \frac{v_0}{3}$$

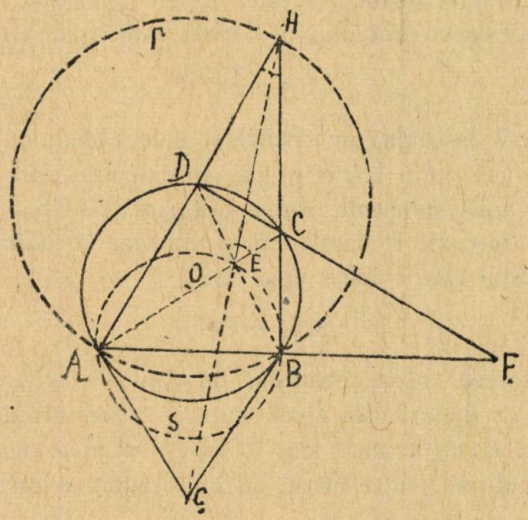
adică pentru a obţine regimul optim al maşinii, va trebui să încărcăm semi-banda superioară astfel în cât viteza ei faţă de mal să fie egală cu a treia parte a vitezei apei faţă de mal.

Am neglijat în acest calcul elementar atât frecările cilindrilor directori cât și regiditatea benzii. Ținând seama de ele, am obține o deplasare (de mică importanță, în genere) pentru punctul de lucru mecanic maxim.

O PROBLEMA DE GEOMETRIE CU PRIVIRI ASUPRA CONICILOR

de AL. V. NICULESCU

Se consideră într'un cerc O *două coarde:* AB *fixă și* CD *mobilă, dar lungimea ei constantă. Dreptele* (AD, CB) *se intâlnesc în* H; *iar* (AC, DB) *în* E; *se cere înfășurata dreptelor* HE, HF *și* EF, F *fiind punctul de intersecție:* (DC, AB). *Să se generalizeze:*



Soluție: In figura alăturată se observă ușor că triunghiul HEF, e un triunghiu autopolar. Prin urmare când F descrie dreapta AB polara lui — dreapta HE va trece necontenit prin G — polul dreptei AB în raport cu cercul O. Să mai observăm că CD fiind constantă, unghiurile în H și E sunt constante și prin urmare descriu cercuri — Γ și S — trecând respectiv prin A și B. Să vedem acum câte drepte EF trec printr'un punct P a planului. P fiind situat pe HE — polara punctului F, polara lui va trece prin prin F. Ori o dreaptă taie un cerc în două puncte: fie acela I, el va fi polul unei alte drepte ce trece prin P — după teoria polului și a polarei. Prin urmare printr'un punct al planului — oarecare — putem duce 2 tangente la curba înfășurată. Curba e deci de clasa II și prin urmare o conică.

Să vedem acum genul conicii.

Cu ajutorul metodii de mai sus putem deduce cu singuranță unul din genul de conici. In adevăr să presupunem că centrul cercului — O e pe cercul S. Atunci O fiind una din pozițiile punctului E rezultă că vom avea o dreaptă dublă HE aruncată la infinit. Curba înfășurată va fi de gen parabolă. Să ne oprim un moment asupra acestui caz. Să presupunem că $\sphericalangle \alpha$ al dreptelor duse din P trebuie să fie drept. Atunci și $\sphericalangle$ sub care se văd polarele din O — e drept. Prin urmare cele două puncte: E, I sunt capetele unui diametru în cercul S. Acest diametru — trecând mereu printr'un punct fix — polul lui va descrie o dreaptă în raport cu cercul O. Deci: Locul punctelor P de unde se duc tangente $\perp^{re}$ e o dreaptă,—directoarea parabolei—teoremă cunoscută. Rezultă imediat că centrul cercului S e focarul parabolii. Curba e complect determinată. Dacă unghiul $\alpha \neq 90^0$ atunci dreapta EI înfășură un cerc concentric cu S. Figura polar reciproc — locul lui P — va fi o conică după cele ce se știe.... Să studiem cazurile celelalte. Figura S și conica-înfășurată sunt figuri polar-reciproc după cum am stabilit la început.

Dacă conica are puncte la infinit, acestor punete le vor corespunde tangente cercului S trecând prin centrul O. Ori din O nu putem duce decât două tangente și aceste numai dacă O e exterior cercului S. In acest caz deci conica înfășurată e o hiperbolă, unghiul asimptotelor fiind suplimentar $\sphericalangle$ format de tangentele sus-numite. Dacă O se găsește la o depărtare: $R.\sqrt{2}$ de centrul cercului S (de rază R) atunci hiperbola e echilateră. Rezultă că în cazul lui O interior cercului S conica-înfășurată e elipsă.

Dacă privim acum figura reese că H e totdeauna într'o regiune exterioară cercului O. (El descrie arcuri de cerc, deasupra și dedesuptul coardei AB). Prin urmare înfășurata dreptei EF e o hiperbolă; cât despre înfășurata dreptei HF ea poate fi oricare din genurile de conici, după cum am văzut mai sus.

Generalizare.

Proectând oblic figura obținută putem enunța: „Fiind date trei conici: S_1, S_2, S_3 și A B C“ „triunghiul autopolar conicii S_2, dacă A, B des-“ „criu respectiv conturul conicilor S_1, S_2 iar C o“ „dreaptă, laturile lui înfășură 3 conici dintre cari“ „una redusă la un punct“.

Teoria figurilor polar-reciproce face evidentă soluția acestei generalizări.

NOTA MATEMATICA

14. *In cele ce urmează ne propunem să găsim condiția ca dreptele:*

$$a_i x + b_i y + m_i = 0 \qquad i\,(1, 2, 3, \ldots n)$$

Să formeze un poligon inscriptibil, regulat sau nu.

1) Poligonul având n laturi, suma unghiurilor sale este:

$$(2n - 4) \times 90^0 = (n - 2) \times 180^0.$$

Insemnând prin: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ unghiurile sale, deducem $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 0$, sau:

$$(1) \qquad \sum \operatorname{tg}\alpha_1 - \sum \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 + \sum \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{tg}\alpha_4 \operatorname{tg}\alpha_5 - \ldots = 0$$

Să presupunem că unghiul α_p e format de dreptele:

$$a_{p-1} x + b_{p-1} y + m_{p-1} = 0 \qquad a_p x + b_p y + m_p = 0$$

El va fi determinat prin relația:

$$\operatorname{tg}\alpha_p = \frac{\dfrac{a_p}{b_p} - \dfrac{a_{p-1}}{b_{p-1}}}{1 + \dfrac{a_p a_{p-1}}{b_p b_{p-1}}} = \frac{a_p b_{p-1} - b_p a_{p-1}}{a_p a_{p-1} + b_p b_{p-1}}$$

După cum $\sphericalangle \alpha_p$ e mai mare sau mai mic ca 90^0 vom considera expresia tangentei sale cu semnul minus sau plus. Din valorile particulare date tuturor coeficenților, se poate vedea ușor dacă un ghiul α_p e mai mare sau mai mic ca 90^0 și prin urmare cunoaștem semnul tangentei sale.

Inlocuind $\operatorname{tg}\alpha_p$ prin valoarea sa în relația (1) avem:

$$\sum \frac{\begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} \\ b_p & b_{p-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_p & b_{p-1} \\ -b_p & a_{p-1} \end{vmatrix}} - \sum \frac{\begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} \\ b_p & b_{p-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} \\ b_{p-1} & b_{p-2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{p-2} & a_{p-3} \\ b_{p-2} & b_{p-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_p & a_{p-1} \\ -b_p & b_{p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} \\ -b_{p-1} & b_{p-2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{p-2} & a_{p-3} \\ -b_{p-2} & b_{p-3} \end{vmatrix}} + \ldots = 0.$$

2) Pentruca poligonul să fie regulat trebue ca să mai avem:

$$\operatorname{tg}\alpha_p = \operatorname{tg}\frac{2n-4}{n} 90^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{360^0}{n}\right) = -\operatorname{tg}\frac{360^0}{n} = \frac{a_p b_{p-1} - b_p a_{p-1}}{a_p b_{p-1} + b_p a_{p-1}}$$

Problema 160 rezolvată în acest număr din R. M. T., anul 2, No. 6, este un caz particular al chestiunei tratate mai sus.

LEON WEISS
Cl. VII R. «V. Alexandri»
Galați

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examenul de admitere în anul I

6 și 7 Octombrie 1924

Trigonometrie

1. Să se rezolve ecuația:

$$\sin(x^2 + 15) = \sin(6x + 2).$$

Să se determine valoarea minimă reală a parametrului și arcul cel mai mic pozitiv care verifică ecuația.

2. Să se calculeze maximul și minimul expresiei:

$$\cos^2 x - 2\cos x \cos a \cos(a + x) + \cos^2(a + x).$$

Să se interpreteze şi să se verifice rezultatul.

3. In triunghiul ABC în care D este piciorul bisectoarei unghiului C, se dă:

$$AD = 813,7,\ BD = 468,3,\ CD = 528,4.$$

Să se calculeze celelalte elemente ale triunghiului.

Geometrie

1. Fie AD şi AD_1 bisectoarele unghiului drept A al unui triunghiu dreptunghic ABC ale cărui catete AC şi AB se înseamnă respectiv cu b şi c. Să se demonstreze că avem:

$$AD = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c} \quad \text{şi} \quad AD_1 = \frac{bc\sqrt{2}}{b-c}$$

2. Se dă patrulaterul inscriptibil ABCD, cercul care trece prin C şi este tangent laturei AD în A, taie latura AB în P. Să se arate că:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{BC}\cdot\overline{AD}}$$

3. Razele OA şi OB ale cercului O fac între ele 45°. Bisectoarea unghiului AOB taie tangenta dusă în B la cerc, în punctul C. Perpendiculara dusă din A pe OB taie cercul O în D iar paralela din C la BD taie pe AD în E. Să se arate că triunghiul OAE este isoscel.

Algebra

1. Se dă funcţiunea:

$$y = \frac{a^2x^2 + (x-b)^2}{a^2x^2 + (x+b)^2} + A \operatorname{arc\,tg} \frac{ax}{x+b}$$

unde A, a, b sunt constante reale. Se cere: 1. Să se determine A astfel ca funcţiunea să fie minimă pentru $x=0$. 2. In acest caz să se afle maximul şi minimul funcţiunei. 3. Să se construiască funcţiunea dată luând A egal cu valoarea găsită, $a=\sqrt{3}$, iar pentru arc. tg. se va lua arcul pozitiv cel mai mic.

2. Ecuaţiile:

$$x^5 - 5x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 45 = 0$$
$$x^5 - 31x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x - 1024 = 0,$$

au toate rădăcinele lor reale.

Să se determine coeficenţii a, b, c; a_1, b_1, c_1, astfel ca rădăcinele primei ecuaţii să fie în progresie aritmetică, iar ale celei de a 2-a ecuaţii, să fie în progresie geometrică.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 1, Septembrie 1924. Lista Membrilor Societăţii «Gazeta Matematică» Premiile şj alte dispoziţiuni ale fondurilor «Gazetei Matematice». Asupra ecuaţiei pitagorice $z^2 = x^2 + y^2$, de *Leonida A. Penenjechevici.*

2. *Foaia Matematică*, an. I, No. 9, Septembrie 1924. Asupra celor şase operaţiuni aritmetice, de Căpitan *I. Linteş.*

3. *P. Sergesco.* Sur quelques inégalites de M. *M. Landau* et *Lindelöf* concernant les fonctions mongènes. (Extrait des comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 28 Juillet 1924).

PROBLEME REZOLVATE

160. — *Să se arate că* — α, β, γ *fiind variabile* — *dreptele:*

$$\gamma x + \alpha y - \alpha\gamma = 0$$
$$\beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$$
$$\alpha x + \gamma y - \beta\gamma = 0$$
$$\alpha x + \beta y - \beta\gamma = 0$$

formează între ele un patrulater inscriptibil.

A. Th. Nicolau

Prima Soluţie. Fie A, B, C, D unghiurile patru laterului format de cele 4 drepte în ordinea dată şi dacă observăm că coeficienţii unghiulari a laturilor sunt respectiv: $-\frac{\gamma}{\alpha}$, $-\frac{\beta}{\alpha}$, $-\frac{\alpha}{\gamma}$, $-\frac{\alpha}{\beta}$ atunci unghiurile patrulaterului sunt date prin relaţiile:

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}}{1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}} = \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma}{\alpha^2 + \beta\gamma}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \alpha\beta}$$

$$\operatorname{tg} C = -\frac{\alpha\beta - \alpha\gamma}{\alpha^2 + \beta\gamma}, \quad \operatorname{tg} D = -\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha\gamma + \alpha\beta}$$

Expresiunile lui tg A, tg C şi tg B, tg D fiind egale şi de semne contrare, deducem:

$$A + C = 180^0, \quad B + D = 180^0,$$

adică unghiurile opuse ale patrulaterului sunt suplimentare, deci patrulaterul este inscriptibil.

Soluții analoage date de d-nii: *Alexandrescu Mihai* (Constanța), *Bârglăzan A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Berdan I. C.* (lic. Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Botis E. Virgil* (lic. Arad), *Brăescu C.* (lic. Henry IV, Paris), *Cristescu Virgil* (Pitești), *Dragomirescu Ed.* (Șc. de Artilerie), *I. N. Georgescu-Val.*, *Gradiny I. Gh.*, *Harth Ernst* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Iliescu E.*, *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Petrulian St. N.* (lic. Ploești), *Pollak Alex.* (Timișoara), *Popeanu A.*, *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Rusescu C.*, *Schileru C. Dili* (Șc. Polit. Timișoara), *Scodrano Alex.* (Durostor), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Stamatiu Mihail* (lic. Pitești), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Stoenescu I. Alex.* (student, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul), *Tuducescu A. N.*, *Ulmanu Octav* (Șc. Polit. Timișoara), *Vasilescu C. Virgil* (lic. Ploești) și *Wetter Maria* (lic. Câmpulung, Bucovina).

Soluția 2-a dată dc d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Popovici Th. Ioan, Septelici Raul* (Șc. de Artilerie) și *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret),

Să căutăm coordonatele punctelor de intersecție A, B, C, D ale celor 4 drepte date. Rezolvind ecuațiile date două câte două, obținem coordonatele lui A, B, C, D, astfel:

$$A(\alpha, 0),\ B(0, \beta),\ C\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}, 0\right),\ D(0, \gamma).$$

Va rezulta că patrulaterul A B C D este inscriptibil, dacă vom arăta că cercul care trece prin trei vârfuri A, B, C de exemplu, trece și prin D.

Fie:

$$(1)\qquad x^2+y^2+2Mx+2Ny+P=0$$

ecuația generală a unui cerc; pentruca el să treacă prin A, B, D, trebui ca M, N, P să satisfacă sistemul:

$$\begin{cases} \alpha^2+2M\alpha+P=0 \\ \beta^2+2N\beta+P=0 \\ \gamma^2+2N\gamma+P=0, \end{cases}$$

de unde deducem ușor:

$$2M=-\alpha-\frac{\beta\gamma}{\alpha},\quad 2N=-\beta-\gamma,\quad P=\beta\gamma.$$

iar (1) devine:

$$(2)\quad x^2+y^2-\left(\alpha+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)x-(\beta+\gamma)y+\beta\gamma=0$$

care este ecuația cercului ce trece prin A. B, D. Inlocuim acum pe x și y în ecuația (2) prin coordonatele punctului C și avem:

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2}-\left(\alpha+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\beta\gamma=0.$$

Ori primul membru simplificat ne dă zero, cercul (2) trece și prin vârful C, rezultă dar că patrulaterul A B C D este inscriptibil.

215. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=(x-p)^2+y^2 \\ 2ax+2by=x^2+y^2, \end{cases}$$

și să se determine p astfel ca soluțiile să fie raționale.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Sistemul dat se poate scri încă, — simplificând prima ecuație —:

$$\begin{cases} 2(a-p)x+2by=a^2+b^2-p^2 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2, \end{cases}$$

sau punând:

(1) $x-a=X,\ y-b=Y,$ avem:

$$\begin{cases} 2(a-p)X+2by=-[b^2+(a-p)^2] \\ X^2+y^2=a^2+b^2 \end{cases}$$

Cum din prima:

$$Y=-\frac{b^2+(a-p)^2+2(a-p)X}{2b}$$

ecuația 2-a devine:

$$X^2+\frac{[b^2+(a-p)^2+2(a-p)X]^2}{4b^2}=a^2+b^2$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad 4[b^2+(a-p)^2]X^2+4(a-p)[b^2+(a-p)^2]X$$
$$+[b^2+(a-p)^2]^2-4b^2(a^2+b^2)=0,$$

sau:

$$4X^2+4(a-p)X+b^2+(a-p)^2-\frac{4b^2(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}=0$$

$$\overset{*}{**}\quad X=\frac{-2(a-p)\pm\sqrt{4(a-p)^2-4b^2-4(a-p)^2+\dfrac{16b^2(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}}}{4}$$

sau:

$$X=-\frac{1}{2}(a-p)\pm\frac{b}{2}\sqrt{\frac{4(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}-1}$$

şi deci:

$$Y=-\frac{b}{2}\mp\frac{a-p}{2}\sqrt{\frac{4(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}-1}$$

Substituind aceste valori în (1), deducem următoarele două sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+p}{2}\pm\dfrac{b}{2}\sqrt{\dfrac{4(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}-1} \\ y=\dfrac{b}{2}\mp\dfrac{a-p}{2}\sqrt{\dfrac{4(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}-1} \end{cases}$$

semnele superioare şi inferioare din faţa radicalilor, corespunzându-se.

Pentruca soluţiile să fie raţionale trebue ca cătimea de sub radical să fie patrat perfect sau zero.

In primul caz, dacă k e un număr raţional, trebue să avem:

$$\frac{4(a^2+b^2)}{b^2+(a-p)^2}-1=k^2,\quad \text{sau:}$$

$$b^2+(a-p)^2=\frac{4(a^2+b^2)}{k^2+1}$$

$$\overset{*}{**}\quad p=a\pm\sqrt{\frac{4(a^2+b^2)}{k^2+1}-b^2}$$

In cazul al 2-lea, având $k=0$, deducem:

$$p=a\pm\sqrt{4a^2+3b^2}.$$

Observare. Geometriceşte prima ecuaţie dată, reprezintă o dreaptă — termenii de gradul al 2-lea în x şi y reducându-se —, iar a 2-a un cerc. A rezolvi sistemul dat, este deci a afla intersecţia unei drepte cu un cerc.

D-l *Tărăbuţă C. Paul* a găsit rezultate exacte, dar pe o cale mai lungă, nefolosind substituţia (1).

D-l *Măcrineanu Sterian* (Galaţi), a dat o soluţie foarte complicată.

D-l *Popescu Iancu*, a dat numai observarea geometrică de mai sus.

216. — *Să se stabilească identitatea:*

$$y=y'+\frac{1}{(-4)^n-1}\sum_{i=0}^{4n-1}y^{(i)},$$

unde $y=e^x\sin x$, *iar* $y^{(i)}$ *înseamnă derivata de ordinul* i *a lui* y. *Să se găsească o identitate analoagă şi peutru şi pentru* $y=e^x\cos x$.

T. POPOVICI

Soluţiune dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *I. N. Georgescu-Val.*, *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (lic. Piteşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani) şi *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Scriind funcţiunea dată şi luând derivatele sale succesive, avem:

$$y=e^x\sin x$$
$$y^{(1)}=e^x(\sin x+\cos x)$$
$$y^{(2)}=2e^x\cos x$$
$$y^{(3)}=2e^x(\cos x-\sin x)$$
$$y^{(4)}=-4y$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(4n)}=(-4)^n y$$
$$y^{(4n+1)}=(-4)^n y^{(1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Adunând membru cu membru primele $4n$ egalităţi, găsim:

$$(1)\quad \sum_{i=0}^{4n-1}y^{(i)}=(y+y^{(1)}+y^{(2)}+y^{(3)})(1-4+4^2-\ldots\pm(-4)^{n-1})$$

Cum observăm că:

$$y+y^{(1)}+y^{(2)}+y^{(3)}=5e^x\cos x,$$

$$1-4-4^2-\ldots\pm(-5)^{n-1}=\frac{(-4)^n-1}{-5}$$

şi, $e^x\cos x=y^{(1)}-y$ relaţia (1) devine:

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{4n-1} y^{(i)}=-[(-4)^n-1]\,e^x\cos x$$
$$=[(-4)^n-1][y-y^{(1)}]$$

De unde:

$$y=y'+\frac{1}{(-4)^n-1}\sum_{i=0}^{4n-1} y^{(i)},$$

şi identitatea dată este stabilită.

Tot astfel avem:

$$y=e^x\cos x,\quad y^{(1)}=e^x(\cos x-\sin x),\quad y^{(2)}=-2e^x\sin x,$$
$$y^{(3)}=-2e^x(\sin x+\cos x),\quad y^{(4)}=-4y,\ldots$$
$$y^{(4n)}=(-4)^n y,\quad y^{(4n+1)}=(-4)^n y^{(i)}\ldots$$

Adunând primele $4n$ egalităţi, obţinem:

$$\sum_{i=0}^{4n-1} y^{(i)}=[y+y^{(1)}+y^{(2)}+y^{(3)}][1-4+4^2-\ldots\pm$$
$$-4)^{n-1}]=[(-4)^n-1]\,e^x\sin x=[(-4)^n-1][y-y^{(1)}],$$

de unde:

$$y=y'+\frac{1}{(-4)^n-1}\sum_{i=0}^{4n-1} y^{(i)},$$

tot identitatea dată.

221[1] — *Două numere sunt reprezentare într'un sistem cu bază necunoscută. prin 2501 şi 301, iar în sistemul cu baza 7 produsul lor este 11110. Să se afla baza necunoscută.*

I. N. GEORGESCU-VAL

Dacă x este baza necunoscută, atunci totalul unităţilor fiecăruia din cele 2 numere este:

$$2501=2x^3+5x^2+1,\quad 301=3x^2+1,$$

iar al numărului care în baza 7 este scris 11110, este:

$$11110=7^4+7^3+7^2+7=2800.$$

Conform enunţului avem:

$$(2x^3+5x^2+1)(3x^2+1)=2800$$

$$(1)\quad \ast\ast\ast\quad 6x^5+15x^4+2x^3+8x^2-2799=0.$$

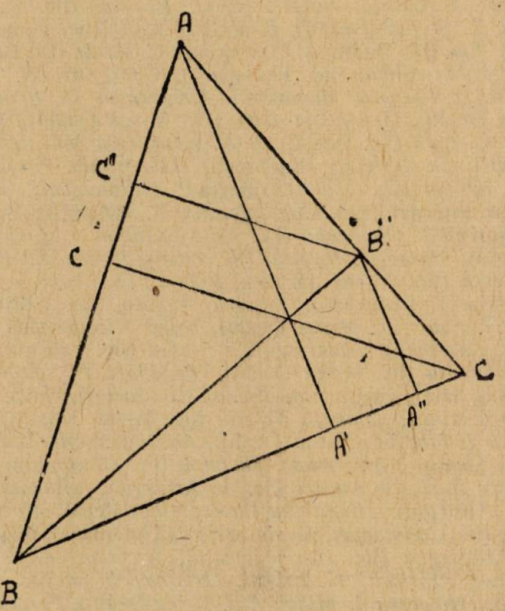
Cum cea mai mare cifră a celor două numere scrise în baza necunoscută este 5, rezultă că această bază x este ≤ 5. Cum 2, 4, 5 nu divid pe 2799 ele nu pot fi rădăcinele ecuaţiei (1); apoi $x=1$ iarăşi nu verifică ecuaţia (1). Rămâne să încercăm dar $x=3$, care verifică ecuaţia (1); deci 3 este baza necunoscută.

Soluţii date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braieşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Ciorănescu C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu C. Gheorghe*, *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Kassargian A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mitescu D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popeea G. Ovidiu* (Chişinău), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie) şi *Vasiliu I.* (lic. M-rea Dealu).

223. — *Fie* A′, B′, C′ *picioarele înălţimelor triunghiului* ABC *şi* A″, C″ *proecţiile lui* B′ *pe* BC *şi* AB. *Să se demonstreze relaţia:*

$$\frac{B'A''}{AA'}+\frac{B'C''}{CC'}=1.$$

EMIL STEFANESCU



1) Enunţ rectificat.

Din triunghiurile asemenea $AC''B'$ şi $AC'C$, deducem:

$$(1) \qquad \frac{B'C''}{CC'} = \frac{AB'}{AC}$$

Triunghiurile $CB'A''$ şi CAA' fiind şi ele asemenea, deducem:

$$(2) \qquad \frac{B'A''}{AA'} = \frac{CB'}{AC}$$

Adunând relaţiile (2) şi (1) obţinem:

$$\frac{B'A''}{AA'} + \frac{B'C''}{CC'} = \frac{CB' + AB'}{AC} = 1,$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţiuni bune date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Alexandrescu A. N.* (Ploeşti), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu). *Bălean G.* (lic. Timişoara), *Bârglăzan Aurel* (Şc. Pol. Timişoara), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici Sigmund* (Piteşti), *Bercovici A. Emil* (student, Bucureşti), *Berdan C.* (Bârlad), *Bernardis N. Berardo* (lic. R.-Sărat), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Bobârnac C. Mircea* (Şc. Polit. Timişoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Botis E. Virgil* (Arad), *Callega M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir. Bucureşti), *Cazancincu A. Vasile* (iic, Naţional, Iaşi), *Ciorănescu C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cligher A.* (Şc. Polit. Timişoara), *Cocorandu M.* (Şc. Polit. Timişoara), *Comănescu D. Al.-Bălteni, Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *Ciută Gavril* (Şc. Polit, Timişoara), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit. Timişoara), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. T.-Jiu), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *David I. Ioan* (Buzău), *Davidsohn Mişu* (Sem. Pedagogic, Bucureşti), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Dobre I. Vasile* Cond. de Luc. Publice). *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Piteşti), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Enulescu Ovidiu* (lic. Chişinău), *Freier Em.* (lic. Focşani), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu C. Ioan* (lic. Piteşti), *I. N. Georgescu Val. Ghelber Mauriciu* (Sem, Pedag. Bucureşti), *Gheorghiu C. Comăneşti, Giotta Vincenţiu* (lic. Bârlad), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Gogălniceanu M. Mihail* (lic. Brăila), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Gulian I. Emil* (lic. Giurgiu), *Harnagea Iorguţă* (lic. Huşi), *Iliescu E., Iliescu Şt. Petre* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Lelescu Luciliu* (lic. M-rea Dealu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Lupse Emil* (Şc. de Conductori, Cluj), *Katz Pincu* (Galaţi), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Moroianu I. Al.* (lic. Constanţa), *Musta Ştefan* (Timişoara), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Oprişanu G. Ernest, Orbonaş Iuliu* (lic Timişoara), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Ploeşti) *Petrulian St. Nicolae* (lic. Ploeşti), *Popa P. Nicolae* (Constanţa), *Popea G. Ovidiu* (Chişinău), *Popescu I. Grigore* (Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu Spirea* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Dan Puiu* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici Gh. A. C.* (lic. Naţional, Iaşi), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Propst Jean* (Şc. Polit. Timişoara), *Rabinovici Samuil* (Cetatea-Albă), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rigani Cr.* (Şc. Polit. Timişoara), *Sabin I. Vlăduţiu* (lic. M-rea Dealu), *Săbău Hortensia* (lic. Arad), *Scripcă C. Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Septelici Raul* (Şc. de Artilerie), *Şerban. I. Tib.* (lic. Braşov), *Sergheiev A. Ion* (lic. Chişinău), *Silion Gh Ion* (lic. Braşov), *Solomon Nicu* (Timişoara), *Solomon W.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Şuşelescu Ion* (lic, M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Stănescu Teodor* (lic. M-rea Dealu), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stănescu A. Niculae* (Şc. Polit. Timişoara), *Tăraş V.* (lic. Braşov), *Tauber Alex.* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu Gh.* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Uroş Mărienuţ* (lic. Arad), *Ursu Victor* (Şc. Polit. Timişoara), *Urzică Aurel* (lic. Deva), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit. Timişoara), *Vlaţiu Laurenţiu* (Constanţa), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) şi *Zamfirescu Alexandru* (lic. Piteşti).

In ultimui timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Spârchez Zeno* (lic. Zărneşti), *Staicu Irimie* (lic. Braşov) şi *Stoica Aurel* (lic, Cantemir, Bucureşti).

Observări. 1. D-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Cligher A.* (Şc. Polit. Timişoara), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara) şi *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), au observat că în caz când punctul B' ar fi pe prelungirea lui AC, relaţia dată trebuie înlocuită prin:

$$\frac{B'A''}{AA'} - \frac{B'C''}{CC'} = 1.$$

2. D-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit. Timişoara), *Dumitrescu G. Marin, Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Georgescu C. Ion* (Piteşti), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu) *Lelescu Luciliu* (lic. M-rea Dealu), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Solomon W.* (Bucureşti) şi *Udrisky Traian* (lic. Arad), au observat că în demonstraţia de mai sus n'am folosit faptul că AA', BB', CC sunt înălţimi, ele pot fi mai general trei ceviene oarecare numai ca $B'C''$ şi $B'A''$ trebuesc duse paralele respectiv cu AA' şi CC'.

3. D-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Şc. Polit. Timişoara), *Gheorghiu C. Comăneşti,*

au observat că problema propusă se poate deduce teorema 553 (Exercices de Géometrie par F. G. M.), care este enunțată astfel:

„Dacă dintr'un punct luat în interiorul unui triunghiu se duc perpendicularele l, l', l'' pe laturile a, b, c, vom avea relațiunea":

$$\frac{l}{h}+\frac{l'}{h'}+\frac{l''}{h''}=0.$$

Dacă acest punct este piciorul înălțimei din A, atunci perpendiculara l se reduce la zero, și prin urmare suntem în cazul problemei date.

Soluție trigonometrică dată de d-nii: *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Solacolu Șerban* (lic. Matei Basarab, București) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

In triunghiurile dreptunghice $CB'A''$ și CAA', putem scri:

$$B'A''=B'C\sin C,\quad AA'=AC\sin C$$

$$(1)\qquad \frac{B'A''}{AA'}=\frac{B'C}{AC}$$

In triunghiurile dreptunghice $AB'C''$ și ACC' putem scrie încă:

$$B'B''=AB'\sin A,\quad CC'=AC\sin A$$

$$(2)\qquad \frac{B'C''}{CC'}=\frac{AB'}{AC}$$

Adunând relatiile (1) și (2) și observând că $B'C+AB'=AC$, obținem:

$$\frac{B'A''}{AA'}+\frac{B'C''}{CC'}=1,$$

tocmai egalitatea cerută.

Propunătorul problemei dă încă următoarea soluție:

Din figură se obseră că:

$$\text{supr.}(ABC)=\text{supr.}(ABB')+\text{supr.}(CBB')$$

$$\text{sau:}\quad \frac{AB\times CC'}{2}=\frac{AB\times B'C''}{2}+\frac{BC\times B'A'}{2}$$

Multiplicând cu $\frac{2}{AB\times CC'}$, avem:

$$(1)\qquad 1=\frac{B'C''}{CC'}+\frac{BC\times B'A''}{AB\times CC'}$$

dar cum: $AB\times CC'=BC\times AA'=2\,\text{supr.}(ABC)$, relația (1) devine: $1=\frac{B'C''}{CC'}+\frac{B'A''}{AA'}$, care este tot relația cerută.

303. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca prima cifră să fie egală cu suma ultimelor două: iar prima mărită cu a treia, să fie egală cu a doua micșorată cu a treia.*

CANTACUZINO I. ION

Fie $abcd$ numărul cerut, care fiind patrat perfect, nu permite a lua pentru d, de cât valorile:

$$d=0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9.$$

Apoi conform enunțului, avem:

$$(1)\qquad a=c+d,\quad (2)\qquad a+c=b-c,$$

de unde: $2c+d=b-c$ sau: $(3)\quad 3c=b-d$

Relația (3) obligă pe c să aibă una din valorile: $c=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Dacă luăm $c=0$, din (1) și (3) deducem: $a=d=b$ și ținând seamă de valorile care le poate avea d și de faptul că: $a>0$, numărul $abcd$ ar putea fi:

1101, 4404, 5505, 6606, 9909.

Dacă luăm $c=1$, din (1) și (3) deducem: $a=d+1$, $b=d+3$ și ținând seamă de valorile ce le poate avea d, numărul $abcd$ ar putea fi:

1310, 2411, 5714, 6815, 7916.

Dacă luăm $c=2$, din (1) și (3) deducem: $a=d+2$, $b=d+6$ și ținând seama de valorile ce le poate avea d, numărul $abcd$, ar putea fi:

2620, 3721.

Dacă luăm $c=3$, din (1) și (3) deducem: $a=d+3$, $b=d+9$ și ținând seamă de valorile ce le poate avea d, numărul $abcd$, ar putea fi:

3930.

Cum ultimele două cifre ale unui patrat perfect sunt cunoscute (C. de P. Arit. XXXIX), vom lăsa la o parte dintre numerile de mai sus, pe acelea care nu's terminate cu ultimele două cifre

cu care se poate termina un patrat perfect. Ne rămâne în felul acesta numai numerele:

1101, 4404, 9909, 7916, 3721.

Dintre acestea numai 3721 este patrat perfect. Singura soluție a problemei este numărul, $3721 = 61^2$.

Soluțiuni mai lungi, sau mai puțin complecte date de d-nii: *Angelescu N. Traian* [Giurgiu], *Ardelea Radu* [lic. Brașov], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Beju O. Traian* [lic. Arad], *Berardo Bernardis* [lic. R.-Sărat], *Berdan C.* [Bârlad], *Blasko Beatris* [Lugoj], *Bocancea I. Kirilă* [lic. Tg.-Mureș], *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, București], *Braieșter I. Otto* [lic. Național, Iași], *Brüll Leon* [lic. Cantemir, București], *Calmanovici Savu* [lic. Cantemir, București], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Cligher A.* [Șc. Polit. Timișoara], *Comănescu Al. Bălteni* [lic. Slatina], *Constantinescu Gh. Ioan* [lic. Chișinău], *Crăciun C. Florin* [lic. Galați], *David Gheorghe* [lic. Timișoara], *Diaconu Gheorghe* [lic. Tg.-Mureș], *Diaconu B. Marin* [lic. M-rea Dealu], *Dumitrescu Gh. Marin* [lic. Craiova], *Feneșan Iancu* [lic. Caransebeș], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *Gataianțu V. Barbu* [lic. Caracal], *Georgescu C. Ion* [lic. Pitești], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Ghelber Mauriciu* [Sem. Ped. București], *Ghilezan Moise* [lic. Timișoara], *Goldstein L. M.* [Sem. Ped. București], *Goldstein N.* [Șc. Polit. Timișoara], *Grabovski Eugeniu* [lic. Orhei], *Gradin I. Gheorghe* [lic. Câmpina], *Grigorescu L. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Grigorescu Pompiliu* [lic. Tg.-Mureș], *Grofșoreanu I. Gheorghe Gulian Emil* [lic. Giurgiu], *Haimer Samuel* [lic. Botoșani], *Herman Avram* [lic. Focșani], *Herscovici Emanoil* [lic. Galați], *Horvat Pavel* [lic. Orăștie], *Iliescu Șt. Dima* [lic. Tg.-Mureș], *Iliescu Grigore* [lic. M-rea Dealu], *Iliescu Th. Theodor* [lic. Spiru Haret, București], *Ionescu Angelo* [Cluj], *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, București], *Ionescu Gh. C-tin* [lic. Tg.-Mureș], *Ionescu Jean* [lic. Spiru Haret, București], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, București], *Kassargian A.* [lic. Cantemir, București], *Katz Pincu* [Șc. Polit. București], *Lindenberg Lionell* [lic. Cantemir, București], *Marinescu I. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Marinescu Traian* [lic. Giurgiu], *Mateescu G. Vasile* [lic. Giurgiu], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Mirescu A. Petre* [lic. Lazăr, București], *Mironovici Virginia* [Câmpulung, Bucovina], *Miu M. Ion* [lic. Caracal], *Moroianu I. At.* [lic. Constanța], *Nedelcu Gh. Ilie* [lic. Giurgiu], *Neumann Maria* [stud. Cluj], *Pamula A. Alexandru* [lic. Botoșani], *Pascu D.* [lic. Brașov], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Popescu N. Corneliu* [Giurgiu], *Popescu Ep.* [lic. Galați], *Popescu Gh. Florian* [lic. Giurgiu], *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popovici Chr. Jean* [lic. Galați], *Purdilă C-tin* [lic. Brașov], *Rabinovici Samuil* [Cetatea-Albă], *Rădulescu P. Marin* [lic. Giurgiu], *Rădulescu Titu* [lic. M-rea Dealu], *Restez P.* [lic. Arad], *Roșu Alexandru* [lic. M-rea Dealu], *Samoilă D-tru* [lic. Câmpina], *Shächter Idearie* [Galați], *Șerban I. Tiberiu* [Brașov], *Serghiev A. Ion* [lic. Chișinău], *Seserman Aurel* [lic. Suceava], *Silion Gh. Ion* [lic. Brașov], *Simionescu Gh., Spărchez Zeno* [lic. Brașov], *Stamatiu Mihail* [Șc. Polit. București], *Stamatescu I. Valeriu* [Sem. Ped. București], *Stănciulescu A. George* [Pitești], *Ștefănescu Emil, Stoenescu C. Ioan* [lic. Galați], *Stoica N. Aurel* [lic. Cantemir, București], *Șușelescu N. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Tăraș Vasile* [lic. Brașov], *Tărăbuță C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul București], *Teodorescu, N., Tomescu Gh.* [Timișoara], *Vaida Mihail* [lic. Caransebeș], *Vasiliu Gh.* [lic. Timișoara], *Vasiliu C. Ion* [lic. Tg.-Mureș], *Vasiliu Nicolae* [lic. Focșani], *Vătășan Gh. Ovid* [Șc. Polit. Timișoara], *Vișoianu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Vlădeanu Tiberiu* [lic. M-rea Dealu], *Vlăduțu Sabin* [lic. M-rea Dealu], *Voiculescu Ștefan* [Șc. Polit. Timișoara] și *Wagner W. I.* [lic. Craiova].

262. — *Să se demonstreze că produsul a două numere terminate cu 5, este egal cu patratul mediei lor aritmetice, micșorat cu 25.*

STANCULESCU I. C-TIN

Vom soluționa problema mai generală.

Produsul a două numere consecutive terminate cu aceiași cifră, este egal cu patratul mediei lor aritmetice micșorat cu 25.

In adevăr dacă N este un număr oarecare de oricâte cifre, atunci: $N-5$ și $N+5$ reprezintă două numere terminate cu aceiași cifră, consecutive. Media lor aritmetică este:

$$\frac{N-5+N+8}{2}=N,$$

iar produsul lor este:

$$(N-5)(N+5)=N^2-25,$$

adică produsul celor două numere este egal cu patratul mediei lor aritmetice, micșorat cu 25.

Dacă N este terminat cu 0, adică $N=10\,N_1$, N_1 un număr oarcare, suntem în cazul problemei propuse.

Soluții analoage date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, București], *David Gheorghe* (lic. Timișoara), *Diaconu Gh.* [lic. Tg.-Mureș], *Diaconu B. Marin* [lic. M-rea Dealu], *Grigorescu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Pârvulescu Titus* [lic. M-rea Dealu], *Popescu Gh. Florian* [lic. Giurgiu], *Popp I. Emilian* [lic. M-rea Dealu], *Propst Emilian* (Șc. Polit. Timișoara), *Rădulescu Titu* [lic. M-rea Dealu], *Șerbănescu I. Virgil* [lic. M-rea Dealu], *Simionescu Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Șușelescu Ioan* [lic. M-rea Dealu],

Alte soluții date de d-nii: *Adam I. Radu* [Constanța], *Bălean G.* [lic. Timișoara], *Beju O. Traian* [lic. Arad], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bercovici A. Emil, Berdan C.* [lic. Bârlad], *Bocancea J. Kirilă* [lic. Tg.-Mureș], *Botez St. Mihail, Brădeșteanu I. Cornel* [Craiova], *Braester I. Otto* [lic. Național, Iași], *Bruno Stefano* [Timișoara], *Brüll M. Leon* [lic. Cantemir, București], *Calmanovici Savu* [lic. Cantemir, București], *Cândea Gh. Ioan* [lic. Sibiu], *Ciorănescu I. C-tin* [M-rea Dealu], *Cocorandu M.* [Timișoara], *Constantinescu N. Nicolae* [Sem. Pedag. București], *Comănescu-Bălteni Al., Corșoreanu Gh. Gheorghe* [lic. Tg.-Jiu], *Coșniță Virgil* [lic. Bârlad], *Dumitrescu C. Nicolae*

[lic. Piteşti], *Dumitrescu N. Savu* [lic. Tg.-Mureş], *Drăghici Aurelian* [lic. Tg.-Jiu], *Dumitrescu Alexandru* [lic. Ped., Bucureşti], *Flickstein J.* [Cernăuţi], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *Gabrielescu C. Vasile* [lic. Brăila], *Galescu Teodor* [Iaşi], *Gataianţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Georgescu C. Ioan* [lic. Piteşti], *I. N. Georgescu-Val.* [Călăraşi], *Gheorghiu C.* [Comăneşti], *Grabovscki Eugen* [lic. Orhei], *Grigorescu Pompiliu* [lic. Tg.-Mureş], *Herman Avram* [lic. Focşani], *Hristodorescu P. Nicolau* (Ploeşti), *Iliescu Şt. Dima* [lic. Tg.-Mureş], *Iliescu Dan Grigore* [lic. Tg.-Mureş], *Iliescu Th. Theodor* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Iliescu Şt. Virgil* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu Bujor C-tin* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Gh. C-tin* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu Al. Mihai* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Isaiia Niculescu*, [Mizil], *Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Katz Pincu* [Galaţi], *Katz S.* [lic. Botoşani], *Lăzărescu M. Vasile* [lic. Giurgiu], *Marinescu Traian* [lic. Giurgiu], *Marini Paul* [Cluj], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Milculescu G. D-tru* [lic. M-rea Dealu], *Miu M. Ion* [lic. Caracal], *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa), *Musta Şt.* [Timişoara], *Neştianu Gh. Gheorghe* [lic. M-rea Dealu], *Niculescu Alexandru* [Bucureşti], *Percea Viorel* [lic. Timişoara], *Polaczek Wilhelm* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Popescu I. Alex.* [lic. M-rea Dealu], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popescu I. Grigore* [Giurgiu], *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan. Popovici Chr. Jean* [lic. Galaţi], *Popovici Dan Puiu* [lic. Chişinău], *Popper Ervin* [lic. Timişoara], *Purdilă C-tin* [lic. Braşov], *Rabinovici Samuel* [Cetatea-Albă], *Rauchbach Artur* [Gura Humorului, Bucovina], *Rauchbach Sidonie* [Gura Humorului, Bucovina], *Rădulescu P. Marin* [lic. Giurgiu], *Rădulescu P. Stelian* [Giurgiu], *Şerban I. Tiberiu* [lic. Braşov], *Şedtilici Raul* [Şc. de Artilerie,], *Silion Gh. Ion* [lic. Braşov], *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* [lic. Braşov], *Staicu Irina* [lic. Braşov], *Stamatiu Mihail* [Piteşti], *Stambuleanu A.* [Timişoara] *Stănescu D.* [Galaţi], *Stănescu A. Nicolae* [Timişoara] *Ştefănescu Emil*, *Stroescu I. Gheorghe* [lic. Tg.-Mureş], *Tauber Alexandru* [lic. Botoşani] *Tăraş Vasile* [Braşov], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Teodorescu M. C.* [Timişoara], *Teodorescu N.* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Tomescu Gheorghe* [Şc. de Artilerie], *Vasilescu A. Mircea* [lic. Giurgiu], *Vasiliu Ion* [lic. M-rea Dealu], *Vătăşan G. Ovid* [Timişoara], *Vlad F. Octavian* [Buzău], *Vlădeanu Tiberiu* [lic. M-rea Dealu], *Vlaţiu Laurenţiu* [Constanţa] şi *Weiss Solomon* [lic. Galaţi].

322. — *Într'un cerc se înscrie două triunghiuri dreptunghice* A C D *şi* B C D *având ca ipotenuză comună un diametru* C D *şi în care raportul catetelor este respectiv egal cu 2 şi 3. Să se arate geometriceşte că în una din poziţiile posibile arcul* A B *este de 90°.*

TR. LALESCU

Fie patrulaterul ABCD în cazul figurei şi unde:

$$(1) \qquad \overline{AC}^2 = 2\overline{AD},\ \overline{BC} = 3\overline{BD}$$

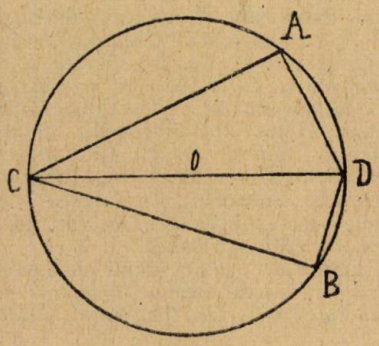
Teorema lui *Pitagora*, ne permite a scrie în cele 2 triunghiuri dreptunghice A C D şi B C D, ţinând seamă şi de relaţiile (1).

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + (2\overline{AD})^2 = 5\overline{AD}^2$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + (3\overline{BD})^2 = 10\overline{BD}^2,$$

de unde:

$$(2) \qquad \overline{AD} = \overline{BD}\sqrt{2}$$



Teorema lui *Ptolomeu* aplicată patrulaterului A B C D, ne dă:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{AC}\cdot\overline{BD} + \overline{AD}\cdot\overline{CB}.$$

Ţinând seamă de relaţiile (1) şi (2), putem scrie încă:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 2\overline{AD}\cdot\overline{BD} + 3\overline{BD}\cdot\overline{BD}\sqrt{2} =$$

$$2\overline{BD}\cdot\overline{BD}\sqrt{2} + 3\overline{BD}^2\sqrt{2} = 5\overline{BD}^2\sqrt{2}$$

$$= \frac{10\overline{BD}^2}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{CD}^2}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{*}{**} \quad AB = \frac{\overline{CD}\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2},$$ R fiind raza cercului.

AB este astfel latura patratului înscris în cercul O şi deci arcul A B este de 90°. A se vedea şi articolul d-lui Prof. *Traian Lalescu:* despre „Patrulatere remarcabile" R. M. T. an., III, No. 12.

Observări. 1. Pentru un diametru dat C D avem 4 poziţiuni pentru triunghiul A C D, după cum luăm: AC = 2AD sau AD = 2AC, vârful A fiind deasupra sau sub C D. Analog avem patru poziţii şi pentru triunghiul B C D şi deci 16 poziţii de figură pentru patrulaterul A D B C. Se constată uşor că în 8 poziţii arcul A B este de 90°. 2. Vârfurile A şi B se obţin prin intersecţia cercului O,

cu locul geometric al punctelor al căror raport la 2 puncte fixe C și D este dat, loc care se știe că este un cerc.

Soluții analoage date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *Constantinescu Venus* (Șc. Politechnică Timișoara), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Epure Ștefan* (Buzău), *Goldstein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Gradiny I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigore I. V.* (Tg.-Jiu), *Percea Viorel* (lic. Timișoara). *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rauchbach Arthur* (lic. Gura Humorului, Bucovina), *Rămniceanu L-Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Stamatescu I. Val.* (Sem. Ped. București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București) *Vasiliu Gh.* (lic. Timișoara) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

In ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu).

PROBLEME PROPUSE

386. — Să se găsească un număr de două cifre astfel ca scriindu'l de două ori alături și punând la urmă cifra 1, numărul de cinci cifre format să fie un patrat perfect.

BERNARDIS BERARDO

387. — Să se demonstreze că dacă un număr ridicat la puterea a patra se termină cu el însuși, atunci și patratul lui se va termina tot cu numărul însuși.

EMIL ȘTEFANESCU

388. — Se dă un cerc O și două puncte A și B. Să se construiască un trapez isoscel A B C D, având C și D pe cerc și admițând A B ca latură neparalelă.

P. TROFINOV

389. — Se dă un triunghiu oarecare $A_1 B_1 C_1$. Fie A_2, B_2, C_2 trei puncte care împart laturile triunghiului dat în raportul $\frac{1}{k}$ și în același sens, k fiind pozitiv și supra unitar. Pe laturile triunghiului $A_2 B_2 C_2$ se iau punctele A_3, B_3, C_3, cari le împart în raportul $\frac{1}{k}$ și în același sens cu cel de sus, etc. Știind că suma patratelor laturilor triunghiului dat e L^2, să se calculeze:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} (\overline{A_i B_i}^2 + \overline{A_i C_i}^2 + \overline{B_i C_i}^2)$$

R. B. POPA-RADULET

390* — Coarda comună a două parabole având aceiași directoară este perpendiculară pe mijlocul dreptei care unește cele două focare.

V. VALCOVICI

391* — Dacă:

$$\beta = c\alpha^2 - b\alpha + a,$$

atunci avem identitatea:

$$(2\alpha\beta + 2c\alpha - b)^2 - 4\beta[\beta\alpha^2 + (2c\alpha - b)\alpha + c] \equiv b^2 - 4ac$$

V. ALACI.

392. — Să se rezolve în numere întregi și pozitive ecuația:

$$x^2(2y+z)^2 - 5(x+1)(2y+z) + 9 = 0.$$

POPOVICI C. C-TIN

393. — Are expresiunea:

$$e - e - e - e - \dots$$

o limită?

V. VALCOVICI

394. — Să se demonstreze că:

$$(1 - \cos 4\theta)\left(\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\theta} + \operatorname{cotg}^2\theta + 2\right) = 8.$$

VOICULESCU ȘTEFAN

INFORMATIUNI

In editura „Cultura Națională“ București, a apărut cartea d-lui profesor *Traian Lalescu*, *„Calculul Algebric“*. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la *„Cartea Românească“* București ; prețul 80 lei.

In zilele de 6, 7, 8 și 9 Octombrie a. c., a avut loc examenul de admitere în Școala Politechnică din Timișoara. S'au prezentat 211 candidați din care au reușit, în ordinea clasificației, următorii :

1. Vasiliu Alex.	Lic.	Roman (an preg. Tim.)
2. Urzica Aurel	„	Deva
3. Bonea Ion	„	Câmpina
4. Diamandescu C.	„	Ploești
5. Stănescu Gh.	„	„
6. Corodi G.	„	Satu-Mare
7. Tomescu C.	„	Buzău
8. Gane V.	„	R. Sărat
9. Apostolescu N.	„	Iași
10. Arghir V. C.	„	Iași
11. Bogdan Gh.	„	Iași
12. Botiș Virgil	„	Arad
13. Cârstean Tr.	„	Rădăuți (an preg. Tim.)
14. Stan Traian	„	Orșova (an preg. Tim.)
15. Voiculescu St.	„	Caracal (an preg. Tim.)
16. Cândea Ion	„	Sibiu
17. Constantinescu I.	„	Buzău
18. Serghiev I.	„	Chișinău
19. Stefănescu O.	„	Iași
20. Bătucă Ion	„	Orăștie
21. Câlniceanu C.	„	Craiova
22. Crișan N.	„	Deva (an prep. Tim.)
23. Gradin Gh.	„	Câmpina
24. Popescu Dumitru	„	T.-Severin
25. Popovici Remus	„	P. Neamț
26. Alexandru Teodor	„	Beiuș (an prep. Tim.)
27. Marinescu I.	„	Câmpina
28. Stefănescu Ion	„	București
29. Cserveny I.	„	Sighet
30. Ionescu Ilie	„	Caracal
31. Șerban Tiberiu	„	Brașov
32. Atanasiu Alex.	„	București
33. Balea Stefan	„	Sighet
34. Bălteanu C.	„	T.-Severin
35. Ceglokoff G.	„	Chișinău
36. Constantinescu G.	Lic.	P. Neamț
37. Drâmba Gh.	„	Tg. Mureș
38. Filip Gh.	„	Iași
39. Frătici Ion.	„	Brașov
40. Miosnicoff Ivan	„	C. Albă
41. Macri Socrat	„	Botoșani
42. Percea Viorel	„	Timișoara
43. Popescu N-lae Sub.-Lt.	„	Craiova
44. Stefulescu Ion	„	Timișoara
45. Birou Virgil	„	Oravița
46. Enslen Benno	„	C. Albă
47. Florescu Nicolae	„	Sibiu
48. Ivan Nicolae	„	Timișoara (an preg. Tim.)
49. Oros Nicolae	„	Satu Mare
50. Scerbini Victor	„	C. Albă
51. Bernadis Berardo	„	R. Sărat
52. Crașovan V.	„	Sc. A. M. T-șoara
53. Damșescu Al.	„	Timișoara
54. Geanău Ion	„	Iași
55. Juga Coriolan	„	Alba-Iulia
56. Liubenco Dan	„	Tighina
57. Marinescu Gh.	„	București
58. Petrescu Nicolae	„	Iași
59. Rădulescu N.	„	R.-Sărat
60. Spițeriș Jani	„	Galați
61. Barbu O.	„	A.-Iulia (an prep. Tim.)
62. Donică-Iordăchescu A.	„	Chișinău
63. Gârleșteanu M.	„	Timișoara
64. Kleinert Vlad	„	Comrat
65. Radulian A.	„	T.-Severin
66. Cupșa Ion	„	Ș.-Silvaniei (an prep. Tim.)
67. Davidovici A.	„	„ „ „
68 Gheorghiță Gh.	„	P.-Neamț
69. Gora A.	„	Tg.-Mureș
70. Laszlo Tiberiu	Cluj	(Șc. Comercială)
71. Roizin Aron	Lic.	Chișinău
72. Stavrat Gh.	„	Iași
73. Vulpe T.	„	Timișoara
74. Aloman N.	„	Cluj
75. Bumbariu C.	„	Bârlad
76. Grozav Alex.	„	Brad
77. Mavrocordat Alex.	„	Cernăuți
78. Mursa Tiberiu	„	Oradea-Mare
79. Nan Victor	„	Brașov
80. Patronoff D.	„	Varna
81. Spârchez Z.	„	Brașov
82. Stavrat M.	„	Iași
83. Volovschi I.	„	Orhei

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 NOEMBRIE 1924 NO. 9.

BIBLIOT[illegible]A „ASTRA"
SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI IDENTITATI IRATIONALE.
3. NOTE MATEMATICE, 15, 16.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 221, 227, 232, 234, 269, 294, 295, 301.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că dela 1 Octombrie, fac parte din comitetul de redacție al revistei și d-nii: **Lt.-Colonel Dragalina Corneliu,** București și **Bădulescu Vasile,** profesor lic. Șincai, București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

IDENTITAȚI IRAȚIONALE

de V. ALACI

Identitățile iraționale ce le-am propus în „R. M. T.", în numerile 2 și 4, problemele 340 și 354, nu au fost găsite întâmplător, ci au fost construite printr'o metodă care permite a construi oricâte identități analoage, metodă pe care o expunem în cele ce urmează.

Fie:

$$(1) \qquad a x^2 + b x + c = 0,$$

o ecuațiune de gradul al 2-lea cu coeficienți raționali și fie x_1, x_2 rădăcinele ei.

Ne propunem întâi a construi o altă ecuațiune de gradul al 2-lea cu rădăcinele X_1 și X_2, astfel ca:

$$(2) \qquad X_1 = f_1(x_1, x_2), \quad X_2 = f_2(x_1, x_2),$$

unde f_1 și f_2 înseamnă niște funcțiuni raționale de rădăcinele ecuației (1), astfel ca:

$$f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) \quad \text{și} \quad f_1(x_1, x_2) \cdot f_2(x_1, x_2),$$

să fie funcțiuni simetrice de rădăcinele ecuației (1).

Pentru a construi ecuația cu rădăcinele X_1 și X_2, formăm suma și produsul lor, avem:

$$(3) \qquad \begin{aligned} X_1 + X_2 &= f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2), \\ X_1 X_2 &= f_1(x_1, x_2) \cdot f_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Membrii al 2-lea fiind prin ipoteză funcțiuni simetrice de rădăcinele x_1, x_2 ale ecuației (1), după o teoremă cunoscută se pot exprima în funcție rațională de coeficienții a, b, c a ecuației (1), deci relațiile (3) sunt de forma:

$$(4) \qquad X_1 + X_2 = \varphi_1(a, b, c), \quad X_1 X_2 = \varphi_2(a, b, c)$$

unde φ_1 și φ_2 sunt funcțiuni raționale de a, b, c.

Privind relațiile (4) ecuația de gradul al 2-lea cu rădăcinele X_1 și X_2, este:

$$X^2 - \varphi_1(a, b, c) X + \varphi_2(a, b, c) = 0.$$

Cum rădăcinele acestei ecuații sunt:

$$X = \frac{\varphi_1(a, b, c) \pm \sqrt{\varphi_1^2(a, b, c) - 4\varphi_2(a, b, c)}}{2}$$

și cum ele sunt legate de rădăcinele ecuației (1), prin relațiile (2), urmează că putem scri—înlocuind pe x_1, x_2 cu valorile lor scoase din (1)— identitățile iraționale:

$$(A) \qquad \begin{aligned} \frac{\varphi_1(a, b, c) \pm \sqrt{\varphi_1^2(a, b, c) - 4\varphi_2(a, b, c)}}{2} &= f_1\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\ \frac{\varphi_1(a, b, c) \mp \sqrt{\varphi_1^2(a, b, c) - 4\varphi_2(a, b, c)}}{2} &= f_2\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Evident că înaintea radicalului din primul membru, vom lua semnul + sau —, semn care se hotărește ușor, particularizând pe a, b, c; dar dacă am fixat semnul în prima identitate, în a 2-a semnul este contrar.

Identitățile iraționale (A) sunt acelea pe care le aveam în vedere și în aplicații vom particulariza numai funcțiunile $f_1(x_1, x_2)$ și $f_2(x_1, x_2)$ în condițiile enunțate.

Consecinți. 1. *Dacă* $b^2 - 4ac$ *este patrat perfect, atunci și* $\varphi_1^2(a, b, c) - 4\varphi_2(a, b, c)$ *este patrat perfect.* In acest caz membrii al 2-lea din

(A) sunt raționali în a, b, c, urmează că și primii membrii trebuie să fie raționali și deci $\varphi_1^2(a,b,c) - 4\varphi_2(a,b,c)$ trebuie să fie patrat perfect.

2. *Dacă $b^2 - 4ac$ nu-i patrat perfect, atunci $\varphi_1^2(a,b,c) - 4\varphi_2(a,b,c)$ se divide cu $b^2 - 4ac$, iar câtul este un patrat perfect.* Membrii al 2-lea din (A) în acest caz, fiind o funcție rațională de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ și primii membrii trebuie să fie, urmează deci că: $\varphi_1^2(a,b,c) - 4\varphi_2(a,b,c)$ se divide cu $b^2 - 4ac$ iar câtul este un patrat perfect.

Aplicații. 1. *Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinele ecuației:*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

să se construiască ecuația de gradul al 2-lea ale cărei rădăcini sunt:

$$(2)\quad X_1 = \alpha + \frac{1}{x_1},\quad X_2 = \alpha + \frac{1}{x_2} \quad (\alpha \text{ fiind un număr dat})$$

și în urmă să se deducă identitățile irațională ce decurg.

Cum:

$$X_1 + X_2 = 2\alpha + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},\quad X_1 X_2 = \alpha^2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}$$

iar:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

urmează:

$$X_1 + X_2 = 2\alpha - \frac{b}{c},\quad X_1 X_2 = \alpha^2 - \frac{b\alpha}{c} + \frac{a}{c}$$

și ecuația de gradul al 2-lea căutată este:

$$(3)\quad cX^2 - (2c\alpha - b)X + c\alpha^2 - b\alpha + a = 0$$

Cum între rădăcinele ecuațiilor (1) și (3) există relațiile (2), avem:

$$\frac{2c\alpha - b \pm \sqrt{(2c\alpha - b)^2 - 4c(c\alpha^2 - b\alpha + a)}}{2c} = \alpha + \frac{2a}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$(4)\qquad \frac{-2c\alpha - b \mp \sqrt{(2c\alpha - b)^2 - 4c(c\alpha^2 - b\alpha + a)}}{2c} = \alpha + \frac{2a}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Pentru a fixa semnul primului radical, particularizăm pe a, b, c, anume luăm: $a = c = 1$ $b = 0$, atunci prima relație devine:

$$\frac{2\alpha \pm \sqrt{-4}}{2} = \alpha + \frac{2}{\sqrt{-4}}$$

sau

$$\pm\frac{\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\sqrt{-4}}{-4} = -\frac{\sqrt{-4}}{2}$$

vom lua deci semnul — în prima relație și + în a doua.

Identitățile (4) se pot scrie în una singură:

$$(5)\quad \frac{2c\alpha - b \mp \sqrt{(2c\alpha - b)^2 - 4c(c\alpha^2 - b\alpha + a)}}{2c} = \alpha - \frac{2a}{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

semnele superioare și inferioare înaintea radicalilor corespunzându-se. Avem astfel dubla identitate irațională (5), care se poate verifica și direct.

Observare. În virtutea consecinței 2 de mai sus, putem afirma fără nici un calcul, că:

$$(2c\alpha - b)^2 - 4c(c\alpha^2 - b\alpha + a)$$

se divide cu $b^2 - 4ac$, iar câtul e un patrat perfect.

2. *Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinele ecuației:*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

să se construiască ecuația de gradul al 2-lea, ale cărei rădăcini sunt:

$$(2)\qquad X_1 = \alpha + \frac{x_1}{\alpha x_1 + 1},\quad X_2 = \alpha + \frac{x_2}{\alpha x_2 + 1}$$

(α fiind un număr dat).

și în urmă să se deducă ecuațiile irațională ce decurg.

Cum:

$$X_1 + X_2 = 2\alpha + \frac{2\alpha x_1 x_2 + x_1 + x_2}{\alpha^2 x_1 x_2 + \alpha(x_1 + x_2) + 1}$$

$$X_1 X_2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha x_1 x_2 + x_1 + x_2}{\alpha^2 x_1 x_2 + \alpha(x_1 + x_2) + 1} + \frac{x_1 x_2}{\alpha^2 x_1 x_2 + \alpha(x_1 + x_2) + 1}$$

iar:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

urmează:

$$X_1 + X_2 = 2\alpha + \frac{2c\alpha - b}{c\alpha^2 - b\alpha + a},$$

$$X_1 X_2 = \alpha^2 + \frac{2c\alpha - b}{c\alpha^2 - b\alpha + a}\alpha + \frac{c}{c\alpha^2 - b\alpha + a}$$

și ecuația de gradul al 2-lea cerută este:

$$(3)\quad \beta X^2 - (2\alpha\beta + 2c\alpha - b)X + \beta\alpha^2 + (2c\alpha - b)\alpha + c = 0,$$

unde am pus:

$$c\alpha^2 - b\alpha + a = \beta.$$

Cum între rădăcinele ecuațiilor (1) și (3) există relațiile (2), avem:

$$(4)\quad \frac{2\alpha\beta + 2c\alpha - b \pm \sqrt{(2\alpha\beta + 2c\alpha - b)^2 - 4\beta[\beta\alpha^2 + (2c\alpha - b)\beta + c]}}{2\beta} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{2a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}}$$

Pentru a vedea cum se corespund semnele înaintea radicalilor, să particularizăm pe $a, b, c,$ luând de exemplu:

$a = c = \alpha = 1$, $b = 0$, în care caz $\beta = 2$, și (4) devine

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{4} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{-4}}} = \frac{2 + 2\sqrt{-4}}{2 + \sqrt{-4}}$$

sau:

$$\frac{6 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{6 + \sqrt{-4}}{4},$$

deci vom lua semnul + înaintea primului radical, când înaintea celui de al 2-lea radical luăm semnul +.

Relația (4) reprezintă deci o dublă identitate irațională, semnele superioare și inferioare înaintea radicalilor, corespunzându-se.

3. *Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinele ecuației:*

$$(1)\quad ax^2 + bx + c = 0,$$

să se construiască ecuația de gradul al 2-lea, ale cărei rădăcini sunt:

$$(2)\quad X_1 = \frac{1}{x_1^2},\quad X_2 = \frac{1}{x_2^2}$$

și în urmă să se deducă identitățile raționale ce decurg.

Cum:

$$X_1 + X_2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2},$$

$$X_1 X_2 = \frac{1}{x_1^2 x_2^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

ecuația de gradul al 2-lea căutată este:

$$(3)\quad c^2X^2 - (b^2 - 2ac)X + a^2 = 0.$$

Cum între rădăcinele ecuațiilor (1) și (3) există relațiile (2), avem:

$$(4)\quad \frac{b^2 - 2ac \pm \sqrt{(b^2 - 2ac)^2 - 4a^2c^2}}{2c^2} = \frac{4a^2}{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})^2}$$

Pentru a vedea ce semn trebue să luăm înaintea primului radical, când luăm + înaintea celui de al 2-lea radical, particularizăm pe $a, b, c,$ anume luăm:

$$a = b = c = 1.$$

Relația (4) devine:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{4}{(-1 + \sqrt{-3})^2} = -\frac{2}{1 + \sqrt{-3}} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

deci vom lua semnul + înaintea primului radical. Relația (4) reprezintă astfel o dublă identitate irațională, semnele superioare și inferioare înaintea radicalilor corespunzându-se.

Observare. Dacă în identitatea (4), trecem pe $2c^2$ în membrul al 2-lea și extragem apoi rădăcina patrată, avem dubla identitate:

$$\frac{2ac\sqrt{2}}{\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b} = \sqrt{b^2 - 2ac \pm \sqrt{(b^2 - 2ac)^2 - 4a^2c^2}},$$

care constitue problema 340 din „R. M. T.“, an. IV, No. 2, când luăm înaintea radicalilor semnul +, problema care se poate soluționa și direct prin calcul.

4. *Dacă* x_1, x_2 *sunt rădăcinele ecuației:*

$$(1) \qquad a x^2 + b x + c = 0,$$

să se construiască ecuația de gradul al 2-lea ale cărei rădăcini sunt:

$$(2) \qquad X_1 = \frac{1}{x_1^3}, \quad X_2 = \frac{1}{x_2^3}$$

și în urmă să se deducă identitățile irationale ce decurg.

Cum:

$$X_1 + X_2 = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3 x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1^3 x_2^3} = \frac{3 a b c - b^3}{c^3}, \quad X_1 X_2 = \frac{a^3}{c^3}$$

ecuația de gradul al 2-lea căutată este;

$$(3) \qquad c^3 X^2 - (3 a b c - b^3) X + a^3 = 0,$$

Cum între rădăcinele ecuațiilor (1) și (3) există relațiile (2), avem:

$$(4) \qquad \frac{4 a b c - b^3 \pm \sqrt{(3 a b c - b^3)^2 - 4 a^3 c^3}}{2 c^3} = \left(\frac{2 a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}} \right)^3$$

Pentru a vedea ce semn trebuie să luăm înaintea primului radical, când înaintea celui de al 2-lea luăm semnul +, particularizăm pe a, b, c luând de exemplu:

$$a = c = 1, \quad b = 0,$$

avem:

$$\frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{8}{-4\sqrt{-4}} = \frac{\sqrt{-4}}{2},$$

deci vom lua semnul + înaintea primului radical. Relația (4) reprezintă astfel o dublă identitate irațională, semnele superioare și inferioare înaintea radicalilor corespunzându-se.

Observare. Dacă în identitatea (4) trecem pe $2 c^3$ în al 2-lea membru și extragem apoi rădăcina cubică, avem dubla identitate:

$$\frac{2 a c \sqrt[3]{2}}{\pm\sqrt{b^2 - 4 a c} - b} = \sqrt[3]{3 a b c - b^3 \pm \sqrt{(3 a b c - b^3)^2 - 4 a^3 c^3}}$$

care constitue problema 354 din „R. M. T.“, an. IV, No. 4 [1]), când luăm înaintea radicalilor pătrați semnul +, problemă care se poate soluționa și direct prin calcul.

5. *Dacă* x_1, x_2 *sunt rădăcinele ecuației:*

$$(1) \qquad a x^2 + b x + c = 0,$$

să se construiască ecuația de gradul al 2-lea, ale cărei rădăcini sunt:

$$(2) \qquad X_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}, \quad X_2 = \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_2}$$

și în urmă să se deducă identitățile irationale ce decurg.

Cum,

$$X_1 + X_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = -\frac{b}{c} + \frac{b^2 - 2 a c}{c^2} = \frac{b^2 - 2 a c - b c}{c^2}$$

$$X_1 X_2 = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1^3 x_2^3} + \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3 x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1^3 x_2^3} = \frac{b^3 - a c (a + c) - 3 a b c}{c^3}$$

ecuația de gradul al 2-lea căutată este:

$$(3) \quad c^3 X^2 - c (b^2 - 2 a c - b c) X - \left[b^3 - a c (a + c) - 3 a b c \right] = 0.$$

Cum între rădăcinele ecuațiilor (1) și (3) există relațiile (2), avem:

[1]) Cu acest prilej atragem atenția corespondenților noștri că în problemele propuse 340 și 354 se va lua semnul + înaintea radicalilor pătrați din membrii al doilea.

$$(4)\qquad \frac{c(b^2-2ac-bc)\pm\sqrt{c^2(b^2-2ac-bc)^2+4c^3[b^3-ac(a+c)-3abc]}}{2c^3}$$

$$=\frac{2a}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}+\frac{4a^2}{(-b-\sqrt{b^2-4ac})^2}$$

Pentru a vedea ce semn trebue să luăm înaintea primului radical, particularizăm pe a, b, c, luând de exemplu: $a=c=1$, $b=0$, avem:

$$\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{-4}}-1=\frac{-2-\sqrt{-4}}{2}$$

Vom lua deci semnul — înaintea primului radical; iar dacă în membrul al 2-lea am lua semnul — pentru primul radical şi + pentru al 2-lea, va trebui sa luăm înaintea radicalului din primul membru semnul +. Avem deci următoarea dublă identitate, simplificând cu c.

$$(5)\qquad \frac{b^2-2ac-bc\mp\sqrt{(b^2-2ac-bc)^2+4c[b^3-ac(a+c)-3abc]}}{2c^2}=\frac{2a}{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}+\frac{4a^2}{(-b\mp\sqrt{b^2-4ac})^2}$$

semnele superioare şi inferioare înaintea radicalilor corespunzându-se.

Observare. In virtutea primei consecinţi stabilită, rezultă că:

Dacă b^2-4ac *este patrat perfect, atunci şi expresiunea:*

$$(b^2-2ac-bc)^2+4c[b^3-ac(a+c)-3abc]$$

este patrat perfect, care constitue enunţul problemei 364 din „R. M. T.“, anul IV, No. 6, problemă care se poate soluţiona şi direct prin calcul.

Exemplele tratate sunt suficiente pentru a invedera formarea oricâtor identităţi iraţionale prin metoda uniformă expusă.

NOTE MATEMATICA

15. *Asupra problemei No. 320.* In această problemă se cerea să se demonstreze că, dacă:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$$

atunci expresiunea:

$$\frac{2x^3+2y^3+2z^3-9xyz}{(x+y)^3+(y+z)^3+(x+z)^3}$$

este independentă de x, y, z.

In cele ce urmează voi arăta că expresiunea e independentă de x, y, z şi în cazul când avem:

$$(1)\qquad x+y+z=0.$$

In adevăr expresiunea dată se poate pune sub forma:

$$\frac{2x^3+2y^3+2z^3-9xyz}{2x^3+2y^3+2z^3+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3xz(x+z)}$$

Insă din (1) scoatem:

$$x+y=-z,\quad y+z=-x,\quad x+z=-y,$$

şi înlocuind la numitor avem:

$$\frac{2x^3+2y^3+2z^3-9xyz}{2x^3+2y^3+2z^3-9xyz}=1.$$

Deci expresia dată e independentă de x, y, z.

POPOVICI C. C-TIN
Lic. Internat Iaşi

16. *Asupra problemei 167.* Se cerea în această problemă să se calculeze expresia:

$$E=\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}}}}$$

numărul radicalilor suprapuşi fiind p sau infinit.

Pentru $p=\infty$, se putea proceda astfel.

Avem:

$$y=\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\ldots}},$$

y fiind valoarea expresiei date, admiţând că expresia dată admite o limită.

Ridicând la puterea q, găsim:

$$y^q = \left(\frac{m}{n}\right)^q \frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\ldots}}$$

sau $y^q = \left(\frac{m}{n}\right)^q y$; împărțind ecuația cu y, vom avea:

$$y^{q-1} = \left(\frac{m}{n}\right)^q \quad * * * \quad y = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{q}{q-1}}$$

care e valoarea expresiei date când numărul radicalilor este nelimitat și care valoare s'a găsit și la pag. 88, an. III-lea unde a fost rezolvată.

AURELIU STOICA
Liceul Cantemir, București

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examen scris de sfârșit de an
Sesiunea de toamnă, anul I

Analiza

4 Octombrie 1924.

1. Să se calculeze aria comună cercurilor:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 5y = 0. \end{cases}$$

2. Să se determine funcțiunile $A(x)$ și $B(x)$ astfel ca ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} + A(x) \cdot y + B(x) = 0,$$

să admită ca integrale particulare

$$y_1 = x^2 + x, \quad y_2 = x^2.$$

Se cere apoi integrala generală a ecuației diferențiale date, în care s'a înlocuit $A(x)$ și $B(x)$, cu valorile găsite,

Geometrie analitică

12 Octombrie 1924.

1. Se dă o parabolă raportată la axă și la tangenta la vârf. Fie M un punct mobil pe parabolă. Cercul descris pe OM ca diametru întâlnește parabola în alte două puncte în afară de O și M. Să se afle poziția lui M pentru care cercul de diametru OM este tangent parabolei. Se vor găsi două puncte M' și M'' simetrice față de Ox, având abscisa cât dublul ordonatei.

2. Să se discute natura cuadricei:

$$(\lambda + 1)x^2 + \lambda y^2 + z^2 - 2xy + 2z + 2y + 4 = 0.$$

după valorile pe care le ia λ.

BIBLIOGRAFIE

1. *Societatea Română de Științe.* Buletinul de Științe Matematice pure și aplicate, anul XXVI, Ianuarie-Iulie 1924, cuprinde: Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire, par *N. Abramesco*, (Cluj, Roumanie). Sur les noyaux symétrisables, par *P. Sergesco*. Procesele-verbale ale ședințelor «Societății Române de Științe», din 5 și 19 Noembrie, 17 și 31 Decembrie 1923, 28 Ianuarie, 11 și 25 Februarie, 3 și 17 Martie, 7 și 14 Aprilie, 5 și 19 Mai și 2 Iunie 1924, sub președenția d-lui Prof. *D. Pompeiu* și Prof. *Gh. Filipescu.*

2. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 2, Octombrie 1924. Calculul unei clase de integrale definite, de *Th Angheluță.* Asupra triologiei și triortologiei, de *G. I. Dumitrescu.*

3. *Foaia Matematică,* anul I, No. 10, 1924.

Premii. Asupra celor șase operațiuni aritmetice, de Căpitan *I. Linteș.*

PROBLEME REZOLVATE

221 [1]. — *Două numere sunt reprezentate într'un sistem cu bază necunoscută, prin 2501 și 301, iar în sistemul cu baza 7, produsul lor este 365542. Să se afle baza necunossută.*

I. N. GEORGESCU-VAL

Dacă x este baza necunoscută, atunci totalul unităților numerilor date este:

$$2x^3 + 5x^2 + 1 \text{ și } 3x^2 + 1,$$

iar al numărului care în baza 7 este 365542, este:

$$3\times7^5 + 6\times7^4 + 5\times7^3 + 5\times7^2 + 4\times7 + 2 = 66817$$

Conform enunțului, avem:

$$(1) \qquad (2x^3 + 5x^2 + 1)(3x^2 + 1) = 66817.$$

Cum cea mai mare cifră a celor două numere scrise în baza necunoscută este 5, rezultă că această bază x este ≥ 6. Dar pentru $x = 6$, ecuația (1) este verificată, și alt număr pozitiv nu mai verifică ecuația (1), deci 6 este baza necunoscută.

1) Revenim asupra problemei ear, publicată în numărul trecut rectificând enunțul și redactarea soluțiunei.

227. — *Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare, să se arate că avem relaţia:*

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 9abc.$$

IONESCU I. BREZUICA

Prima soluţie dată de d-nii: *Adam I. Mircea* (lic. Constanţa), *Arcadian Nicu* (lic. Caracal), *Grofşoreanu I. Gheorghe*, *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petre* (Cluj), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Weiss Solomon* (Galaţi) şi *Zamfirescu Alexandru* (lic. Piteşti).

Dacă α şi β sunt numere reale oarecare, avem evident:

$$(\alpha-\beta)^2 \geqq 0 \quad \text{sau} \quad \alpha^2+\beta^2 \geqq 2\alpha\beta,$$

dacă α, β sunt şi pozitive, divizând cu $\alpha\beta$, găsim:

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geqq 2.$$

Fiindcă a, b, c sunt numere pozitive, ca fiind lungimele laturilor unui triunghiu, în virtutea relaţiei (1), putem scri:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2, \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqq 2, \quad \frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqq 2.$$

Adunându-le, avem:

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{c+b}{a} \geqq 6,$$

sau încă:

$$\left(\frac{a+c}{b}+1\right)+\left(\frac{b+a}{c}+1\right)+\left(\frac{c+b}{a}+1\right) \geqq 9,$$

$$\overset{*}{**} \quad \frac{a+c+b}{b}+\frac{b+a+c}{c}+\frac{c+b+a}{a} \geqq 9,$$

de unde:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \geqq 9.$$

Aducând la acelaşi numitor şi multiplicând cu factorul pozitiv abc, găsim:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqq 9abc,$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţia 2-a dată de d-nii: *Bălean G.* (lic. Timişoara), *Berdan C.* (lic. Bârlad), *Ciorănescu I. C-tin* (lic, M-rea Dealu), *Ciută G.* (Şc. Polit. Timişoara), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Georgescu P. Constantin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val.* (Şc. de Artilerie), *Giotta Vincenţiu* (lic. Bârlad), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popa P. Nicolae* (Constanţa), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Şuşelescu Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (Sinaia), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie), *Vasiliu Ioan* (lic. M-rea Dealu) şi *Vlăduţu I. Sabin* (lic. M-rea Dealu).

Efectuând calculele din primul membru şi apoi simplificând avem:

$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc \geqq 0$$

$$\overset{*}{**} \quad a(b^2+c^2-2bc)+b(a^2+c^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab) \geqq 0,$$

sau:

$$a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2 \geqq 0.$$

Cum a, b, c sunt numere pozitive, fiind lungimele laturilor unui triunghiu, această ultimă relaţie este evidentă, urmează că şi cea dată, dela care am pornit, este adevărată.

Soluţia 3-a dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Cazacincu A. V.* (lic. Naţional, Iaşi), *I. N. Georgescu-Val.* (Şc. de Artilerie), *Popea Gh. Ovidiu* (lic. Chişinău), *Stamatiu Mihail* (lic. Piteşti) şi *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

Efectuând calculele, găsim:

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geqq 6abc$$

$$\overset{*}{**} \quad ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqq 6abc.$$

Această relaţie este însă adevărată (C. de P., pag. 229), deci şi cea propusă dela care am pornit este adevărată.

Alte soluţii date de d-nii: *Beju Traian* (lic. Arad), *Bobârnac Mircea* (Timişoara), *Coşereanu Ion* (Timişoara),

Kassargian A. (lic. Cantemir, Bucureşti), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stănescu A. Nicolae* (Craiova) şi *Udrisky Traian* (lic. Arad).

Generalizare dată de d-nii: *Adam I. Mircea* (lic. Constanţa), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Weiss Solomon* (Galaţi).

Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt laturile unui poligon oarecare, atunci avem:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2.$$

In adevăr, în virtutea relaţiei (1) din prima soluţie, putem scri:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\geqq 2,\quad \frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\geqq 2,\ldots\ \frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqq 2$$

$$\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\geqq 2,\ldots\ \frac{a_2}{a_n}+\frac{a_n}{a_2}\geqq 2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\geqq 2.$$

Adunându-le, avem:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}$$

$$+\ldots+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_1}\geqq n(n-1).$$

Adunând fiecărei fracţii 1, şi observând că $a_1+a_2+\ldots+a_n$ se poate da factor comun, avem:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2,$$

relaţie ce trebuia stabilită.

232. — *Să se determine valoarea generală a lui k întreg şi pozitiv, pentru ca expresiunea:*

$$E=9963^{1538}+1538^{9963}+k,$$

să fie divizibilă cu 19.

VIRGIL GHITESCU

Putem scri succesiv:

$$E=(M.19+7)^{1538}+(M.19-1)^{9963}+k$$
$$=M.19+7^2.(7^3)^{512}-1+k=M.19$$
$$+(M.19-8)(M.19+1)^{512}-1+k$$
$$=M.19-8-1+k=M.19+k-9.$$

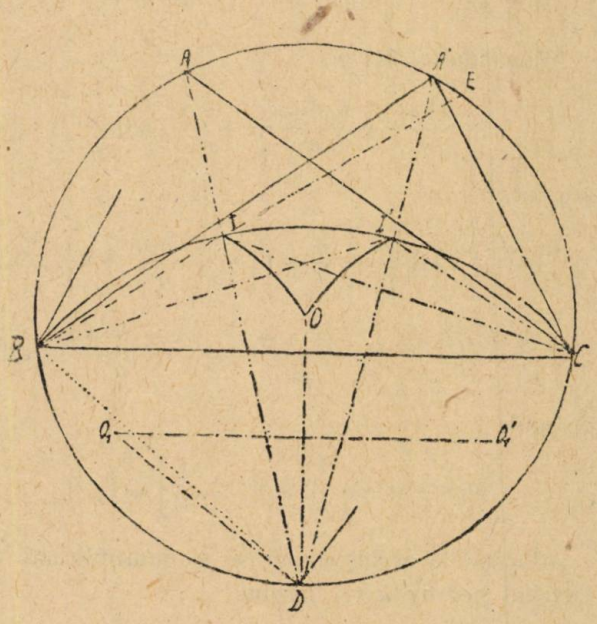
Pentru ca E să fie M.19, trebuie ca:

$$k-9=M.19$$
$$k=M.19+9,$$

Soluţie dată de d-nii: *Angelesu N. Traian* [Giurgiu], *Berdan C.* [Bârlad], *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Braiester I. Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Brădăţeanu Cornel* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Coşniţă Virgil* [lic. Bârlad], *Cretoiu A.* [Bucureşti], *Ebner Arthur* [lic. Galaţi], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iaşi], *Iliescu Th. Theodor* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Katz Pincu* [Şc. Polit. Bucureşti], *Miclescu Andrei* [Şc. de Artilerie], *Mitescu-Dem. Remdeeth* [lic. Tg.-Mureş], *Moroianu I. At.* [lic. Constanţa], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Popovici Dan Puiu* [lic. M-rea Dealu], *Popp Emilian* [lic. M-rea Dealu], *Silion Gh. Ion* [lic. Braşov], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Stănculescu I. C-tin* [lic. Giurgiu], *Stănescu A. Nicolae* [Şc. Polit. Timişoara], *Ştefănescu Emil* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Stoica N. Aurel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stroescu Gheorge* [lic. Tg.-Mureş], *Tauber Alexandru* [lic. Constanţa], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Vasiliu Ion* [lic. M-rea Dealu] şi *Weiss Leon* [lic. Galaţi].

234. — *Intr'un cerc O să se înscrie un triunghiu căruia i se cunoaşte o latură şi unghiul pe care 'l face OI cu una din bisectoare, I fiind centrul cercului înscris triunghiului.*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU



Soluţie dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan Aurel* (Şc. Polit. Timişoara),

Berdan C. (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Şc. Polit. Timişoara), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Nicolaescu P. Ion* (lic. Roman), *Percea Viorel* (Şc. Polit. Timişoara), *Răduleţ B. Remus* (Şc. Polit. Timişoara), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Udrisky Traian* (lic. Arad) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

Fie O cercul dat, BC latura cunoscută şi α unghiul ce 'l face OI cu bisectoarea unghiului A. Presupunem problema rezolvată şi fie ABC triunghiul cerut. Observăm că bisectoarea AI trece prin punctul D mijlocul arcului BC şi fiindcă

$$\sphericalangle BID = \text{măs.}\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AE}}{2},\quad \sphericalangle IBD = \text{măs}\frac{\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{CE}}{2}$$

iar $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$, $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}$, urmează că $\sphericalangle BID = \sphericalangle IBD$ şi deci $DI = DB =$ constant, urmează că locul lui I este arcul BIC descris din D ca centru cu DB ca rază. De altă parte dacă $\sphericalangle DIO = \alpha$, cum OD este fixă, locul lui I este format din două arce de cerc simetrice faţă de OD, din punctele cărora OD se vede sub $\sphericalangle \alpha$ şi acest loc ştim să'l construim. Deci I este intersecţia arcului de cerc de centru D cu DB ca rază, cu arcele de cerc din punctele cărora OD se vede sub $\sphericalangle \alpha$. Rezultă deci următoarea construcţie:

In cercul O se ia o coardă BC egală cu latura cunoscută a triunghiului căutat. Din O se duce $OD \perp BC$, iar din D se descrie un arc de cerc cu BD ca rază. In D se duce o dreaptă care să facă un unghiu α cu OD. Din O_1, intersecţia perpendicularei ridicată în D pe dreapta dusă, cu perpendiculara pe mijlocul lui OD, se descrie un arc de cerc cu O_1O ca rază. Se uneşte D cu I, intersecţia arcelor, apoi se uneşte B şi C cu A, intersecţia dreptei DI cu cercul O. Cum pe OD se pot construi două arce simetrice în raport cu OD, capabile de $\sphericalangle \alpha$, problema admite două soluţiuni.

Observare. In cazul când s'ar da unghiul α ce'l face OI cu bisectoarea unghiului B sau C, s'ar descrie arcele capabile de arcul α, pe OB respectiv pe OC. In cazurile considerate α e presupus cu deschizătura spre BC.

269. — *Ştiind că m, n, p sunt numere întregi, în ce caz expresiunea:*

$$E = 111\,(235^m + 233^n + 233^p) + 123,$$

se divide cu 234?

(†) FL. ER. GEORGESCU

Putem scri succesiv:

$$E = 111\left[(M\cdot 234+1)^m + (M\cdot 234-1)^n + (M\cdot 234-1)^p\right] + 123 = 111\left[M\cdot 234 + 1 + (-1)^n + (-1)^p\right] + 123 = M\cdot 234 + 111\left[(-1)^n + (-1)^p\right]$$

Pentru ca, $E = M\cdot 234$, trebuie numai decât ca:

$$(-1)^n + (-1)^p = 0,$$

ceiace are loc când n este par şi p impar, sau când n este impar şi p par, m fiind orice număr întreg.

Soluţii date de d-nii: *Angelescu N. Traian* [lic. Giurgiu], *Atanasiu I. D-tru* [lic. Huşi], *Bălean G.* [lic. Timişoara], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bercovici Sigmund* [lic. Piteşti], *Berdan C.* [Bârlad], *Blumenfeld M. David* [lic. Botoşani], *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Brădeţeanu C. Cornel* [Craiova], *Brüll M. Leon* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Calmanovici S.* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Cocorandu M.* [Braşov], *Al. Comănescu-Bălteni* [lic. Slatina], *Corşoreanu Gh. Gheorghe* [lic. Tg.-Jiu], *Coşniţă Virgil* [lic. Bârlad], *Creţoiu A.* [Bucureşti], *Diaconu C. Gh., Dumitrescu Gh. Marin* [Slatina], *Flickstein I.* [Cernăuţi], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iaşi], *Gabrielescu C. Vasile* [lic. Brăila], *Georgescu C. Ioan* [lic. Piteşti], *I. N. Georgescu-Val, Gheorghiu-Comăneşti, Grigorescu L. Ion, Iliescu Şt. Dima* [lic. Tg.-Mureş], *Iliescu Şt. Virgil* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu Th. Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Carol* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Katz Pincu* [Şc. Polit. Bucureşti], *Lăzărescu M. Vasile* [lic. Giurgiu], *Mitescu-Dem. Remdeeth* [lic. Tg.-Mureş], *Moroianu At.* [lic. Constanţa], *Muşta Şt.* [Timişoara], *Neştianu Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Pamula Alexandru* [lic. Botoşani], *Panaitescu I. Alex.* [lic. Piteşti], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Percea Viorel* [Şc. Polit. Timişoara], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popescu Florian* [lic. Giurgiu], *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan, Popp Emilian* [lic. M-rea Dealu], *Rădulescu P. Marin* [lic. Giurgiu], *Silion Gh Ion* [lic. Braşov], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Stamatescu I. Val.* [Sem. Pedag. Bucureşti], *Stamatiu Mihail* [Piteşti], *Stănculescu I. C-tin* [Giurgiu], *Stănescu D.* [Timişoara], *Stănescu A. Nicolae* [Timişoara], *Ştefănescu Emil* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Stroescu I. Gheorghe* [lic. Tg.-Mureş], *Tauber Alexandru* [lic. Botoşani], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Vasiliu Ion* [lic. M-rea Dealu] şi *Vlaţiu Laureuţiu* [Constanţa].

294.—*Dacă avem un număr de m cifre, $m \geqq 6$ şi permutăm în toate modurile posibile cifrele sale, suma numerilor formate, inclusiv a celui dat, formează un număr dibizibil cu 18.*

V. ALACI

Prima soluţie dată de d-nii: *Braieşter Otto* (Iaşi) şi *Al. Comănescu-Bălteni* (lic. Slatina).

Fie $N_1 = a_1\, a_2 \ldots a_m$, numărul de m cifre. Permutând în toate modurile posibile cifrele sale, se formează $m!$ numere, N_1, N_2, N_3, $N_{m!}$. Suma $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_m$ se divide cu 2; în adevăr dacă numărul N_1 ar conţine n cifre impare ($n=0, 1, 2, \ldots n \leqq m$), atunci o aceiaşi cifră impară ocupă locul unităţilor în $(m-1)!$ din numerile lui S, deci în S avem $n \times (m-1)!$ numere impare şi cum $n \times (m-1)! = \text{mult. } 2$, urmează că S conţine un număr par de numere impare şi restul numere pare. S e deci divizibil cu 2.

Apoi: $N_1 = \text{mult. } 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$,

$N_2 = \text{mult. } 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$,

$\ldots N_{m!} = \text{mult. } 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$, urmează că:

$$S = \text{mult. } 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \,.\, m!,$$

şi cum $m \geqq 6$, $m! = \text{mult } 9$, urmează că: $S = \text{mult } 9$. S fiind divizibil cu 2 şi 9 este divizibil şi cu 18.

Soluţia 2-a dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Herscovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Ionescu I. Paul* (lic: M-rea Dealu), *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rauchbach Arthur* (Gura Humorului), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

Fie $N_1 = a_1\, a_2 \ldots a_m$ numărul de m cifre dat, $N_2, N_3, \ldots N_m$ numerile formate permutând în toate modurile ciferele lui N_1 şi $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{m!}$ In cele $m!$ numere, cifra a, ocupă fiecare loc, în $(m-1)!$ numere ale lui S, tot aşa şi $a_2, a_3, \ldots a_m$, deci:

$$(1)\quad S = (m-1)!\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)\,(10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1).$$

(A se vedea şi „G. M.“, an. XXVI, pag. 247).

Dacă $m > 6$, atunci: $(m-1)! = 1.2.3.4.5.6..m$ care se divide cu 2. 3 şi 6, deci şi cu 18 şi urmează că: $S = \text{mult. } 18$.

Dacă $m = 6$, atunci:

$$(m-1)! = 5! = 1.2.3.4.5 = \text{mult. } 6,$$

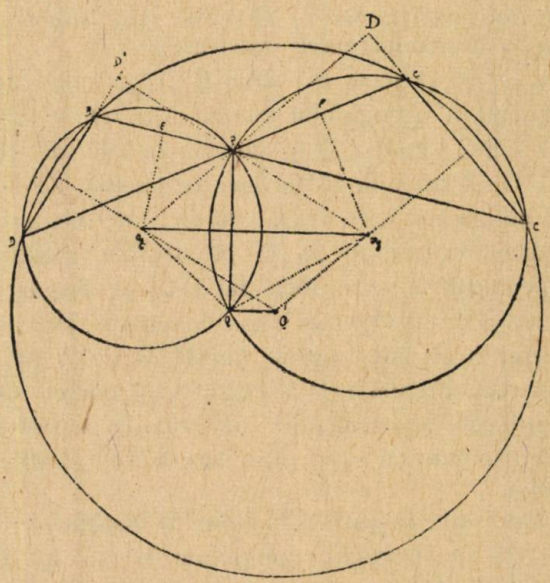
iar ultimul factor din (1) este în acest caz $111111 = \text{mult. } 3$, deci şi în acest caz: $S = \text{mult. } 18$.

Observare. Din (1) se vede că S e divizibil cu $(m-1)!$ deci cu 120 în cazul $m \geqq 6$. S se divide încă cu suma cifrelor lui N_1, şi cu numărul $1\,1\,1..1$ cu m de 1.

Alte soluţii date de d-nii: *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Katz P.* (Bucureşti), *Katz S.* (lic. Botoşani), *Popovici Chr. Jean* (lic. Galaţi) şi *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

295. — *Se dă un cerc* O, *două coarde concurente* BC, B′C′ *şi* P *intersecţia lor*, Q *al doilea punct de intersecţie al cercurilor* PCC′ *şi* PBB′, O_1, O_2 *centrele lor. Să se demonstreze că unghiul* OQP *este drept şi că* $OO_1 = O_2B$.

MAIOR O. BUGEANU.



Vom demonstra întâi că patrulaterul OO_1PO_2 este un paralelogram. In adevăr $OO_1 \perp CC'$, fiind

că distanța centrelor a 2 cercuri e perpendiculară pe coarda comună. Și $O_2P \perp CC'$, iată de ce: Triunghiurile EO_2P și PDC' au, $\sphericalangle O_2PE = \sphericalangle DPC'$ ca opuse la vârf, $\sphericalangle EO_2P = \sphericalangle PC'D$ fiindcă ambele sunt egale cu $\sphericalangle B'BC$, observând măsurile lor; triunghiurile EO_2P și PDC' având câte două unghiuri egale și al 3-lea unghiu al lor sunt egale, adică: $\sphericalangle O_2DC' = \sphericalangle O_2EC' = 90^0$, fiindcă $\sphericalangle O_2EC' = 90^0$. Atât OO_1 cât și O_2P fiind perpendiculare pe CC', sunt paralele între ele. Tot astfel dovedim că OO_2 și O_1P sunt paralele, fiind perpendiculare pe BB', deci patrulaterul OO_1PO_2 este un paralelogram. Rezultă de aci, că: $OO_1 = O_2P = O_2B$. Rămâne să mai dovedim că $\sphericalangle OQP = 90^0$. In adevăr, triunghiurile OO_1O_2 și QO_1O_2, au: O_1O_2 comună, $OO_1 = QO_2$, $OO_2 = O_1P = QO_1$, deci sunt egale, au deci aceiași suprafață și având aceiași bază O_1O_2, vârfurile O și Q sunt pe o paralelă la bază și cum $PQ \perp O_1O_2$ căci distanța centrelor a 2 cercuri e perpendiculara pe coarda comună, urmează că $PQ \perp QO$, deci $\sphericalangle OQP = 90^0$.

Soluții date de d-nii: *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Bârlad), *Botis Ł. Virgil* (lic. Arad), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Crăiniceanu Gh.* (Cluj), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Nan Victor, Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Ploești), *Silion Gh. Ion* lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

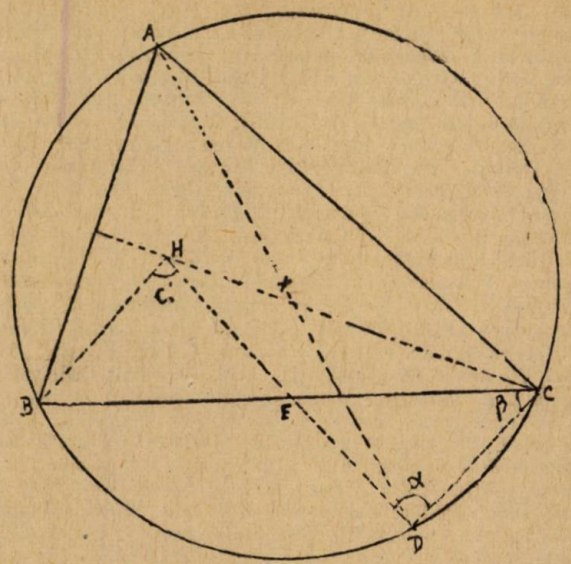
Observare. D-l *Berdan C.* (Bârlad), observă că punctul P rămânând fix și coardele BC, $B'C'$ variind, locul punctului O este un cerc, fiindcă $\sphericalangle PQO = 90^0$ iar P și O sunt fixe.

301. — *Se dă un triunghiu oarecare* ABC *înscris într'un cerc de rază* R. *Pe cerc se ia un punct* D *diametral opus lui* A. *Unim* D *cu ortocentrul* H *al triunghiului* ABC *și fie* E *punctul de intersețcie a lui* BC *cu* DH. *Se cere să se stabilească relațiunea:*

$$\frac{\sqrt{4R^2 - AC^2}}{DE\cos\alpha + BE\cos\beta} = 1,$$

unde $\alpha = BHD$ *și* $\beta = \sphericalangle BCD$.

IULIU ORBONAS



In triunghiul DCE, putem scri:

$$DC = DE\cos EDC + EC\cos\beta,$$

de unde:

$$(1) \qquad \frac{DC}{DE\cos EDC + EC\cos\beta} = 1.$$

Dar din triunghiul dreptunghic ACD, deducem:

$$(2) \qquad DC = \sqrt{4R^2 - AC^2}$$

Fiindcă $BH \parallel DC$ ambele fiind perpendiculare pe AC și $BD \parallel CH$ ambele fiind perpendiculare pe AB, deducem că $BHCD$ este un paralelogram și deci urmează:

$$(3) \qquad \sphericalangle EDC = \alpha, \quad EC = BE.$$

Folosind relațiile (2) și (3), relația (1) devine:

$$\frac{\sqrt{4R^2 - AC^2}}{DE\cos\alpha + BE\cos\beta} = 1,$$

tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (lic. Huși), *Bârglăzan A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Bernardis N. Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Boju Șt. Rosetel* (lic. Timișoara), *Botea Gh. Nicoloe* (lic. Cantemir, București), *Botis V.* (lic. Arad), *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Calmanovici Savu* (lic. Cantemir, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gr. Ion* (Buzău), *Corșoreanu Gh. Gheoghe* (lic Tg.-Jiu). *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Da'*

vld I. Ion (Buzău), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Epure Ştefan* (Buzău), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gârleşteanu Mihai* (lic. Timişoara), *Golcea Cornel* (student, Cluj), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Hotăran Teodor* (student), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu V. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jean Victor* (lic. Deva), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz P.* (Şc. Polit. Bucureşti), *Lupan Em.* (Sem. Ped. Iaşi), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Mihăilescu Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Mitran St. Grigorie* (liic. Craiova), *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa), *Nan Victor, Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Pascu D.* (lic. Braşov), *Pârvulescu Titus* (lic. M-rea Dealu), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Petrescu P. Gheorghe* (lic. Ploeşti), *Pietraru C. Vintilă* .(lic. Braşov), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Răduleţ B. R.* (Şc. Polit. Timişoara), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Staicu Irimie* (lic. Braşov), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Pedag. Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stoenescu C. Ioan* (lic. Galaţi), *Tăraş Vasile* (Braşov), *Tărăbuţă C.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

PROBLEME PROPUSE

395.—In două sisteme de numeraţie a căror bază diferă cu unitatea, un număr este reprezentat prin 3114 şi 2011. Care sunt bazele acelor sisteme de numeraţie şi care este numărul în sistemul zecimal?

ION PROTOPOPESCU

396.* — Să se arate că $5^n!$ se termină cu un număr de zeruri egal cu sfertul lui $5^n - 1$.

LOCOT.-COL. GH BUICLIU

373*[1] — Ce condiţie trebue să îndeplinească triunghiul A B C pentru ca să aibă loc relaţia:

$$\overline{BC}^2 = AB(AB - AC).$$

I. PROTOPOPESCU

397. — Se dau două cercuri secante în A şi B. O secantă mobilă trecând prin A, taie a două oară cercurile în L şi M; pe L M se construeşte un triunghiu L M N asemenea cu un triunghiu dat. Să se afle locul punctului N precum şi locurile centrului cercului circumscris, înscris şi ortocentrului triunghiului L M N când secanta L M se roteşte în jurul punctului A.

DILI C. SCHILERU

398.* — Să se demonstreze inegalitatea:

$$\log_e a < a - 1,$$

a fiind mare ca unitatea.

V. VALCOVICI

399. — Dacă $a+b+c=0$, să se arate că avem:

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{3}{4}$$

I. DIMITRIU-ARAD

400. — x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinele ecuaţiei $x^3+px+q=0$, să se formeze ecuaţia care admite rădăcinele:

$$x_1^3+x_2^3-2x_3^3,\ x_2^3+x_3^3-2x_1^3,\ x_3^3+x_1^3-2x_2^3$$

TAUBER ALEXANDRU

401.* — Pe aceiaşi dreaptă se iau în acelaşi sens, segmentele, $AB=BC=CD=2a$. Pe AB, BC, CD ca diametre se descriu cercuri. Să se determine un punct P pe cercul mijlociu, aşa că ducând perechile de tangente P M, P M' şi P N, P N' la celelalte două cercuri, suma ariilor triunghiurilor mixtilinii P M M' şi P N N' să fie minimă sau maximă.

V ALACI.

402.* — Pe un plan înclinat la 30° se găseşte o greutate G_1, legată cu un fir ce este trecut la capăt pe un scripet şi de fir atârnă greutatea $G_2=\frac{G_1}{2}$ având astfel echilibru. Dacă sistemul de două greutăţi e în mişcare uniformă cu viteza v, şi avem o forţă de frecare F_1 pe planul înclinat pentru G_1, să se afle timpul când se va opri.

C. TEODORESCU

1) Problema cu aselaşi număr propusă în No. 6, pag. 94, se anulează înlocuindu-se cu prezenta.

INFORMATIUNI

In editura „Cultura Națională“ București, a apărut cartea d-lui profesor *Traian Lalescu*, *„Calculul Algebric“*. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la *„Cartea Românească“* București ; prețul 80 lei.

In biblioteca „Gazetei Matematice“ a reapărut cartea d-lui profesor *Niculae Abramescu*, „Lecțiuni de Algebră Superioară, Teoria ecuațiilor“. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la „Gazeta Matematică“, Fabrica de chibrituri, Filaret, București, prețul 80 lei.

Concursul R. M. T.

In acest număr se publică ultimele probleme de concurs, care prin aceasta se închide.

Pentru a da timp candidaților să-și pregătească cu îngrijire soluțiile, se acordă un termen până la *15 Ianuarie 1925*, până când se vor mai primi soluțiuni ale acestor probleme, și după care comisiunea va începe triarea lor în vederea acordării premiului.

Concurenții vor trebui deci ca până la această dată să trimită d-lui Prof. V. Alaci, Piața Doja, 12, Timișoara, soluțiile următoarelor probleme :

372, 373, 381, 382, 390, 391, 396, 398, 401, 402.

In același timp concurenții vor căuta să rezolve cât mai multe dintre problemele propuse în aceste patru numere și anume dela 369 până la 403.

Activitatea anterioară a candidaților se măsoară prin problemele bine rezolvate și publicate înainte ca el să fi știut despre acest concurs, în numerile 1, 2, 3, 4.

Premiul se va acorda acelui concurent care întrunește cel mai mare număr de puncte calculate după modul indicat în No. 6, al R. M. T., pag. 90.

Numărul maxim de puncte ce îl poate întruni un concurent va fi deci :

8 probleme de concurs à 5 puncte	=	40 puncte
27 probleme simple à 2 puncte	=	54 puncte
20 probleme publicate à 1 punct	=	20 puncte
		114 puncte

Rezultatul concursului se va publica în No. 11, din luna Februarie.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul IV-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI LEI)

și se trimite pe adresa :

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 DECEMBRIE 1924 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. VALCOVICI. MISCAREA UNUI PUNCT SUB ACTIUNEA UNOR FORTE ELASTICE.
2. NOTE MATEMATICE, 17.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 272, 278, 316, 321, 327, 333, 339, 349, 355, 356.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că dela 1 Octombrie, fac parte din comitetul de redacție al revistei și d-nii: **Lt.-Colonel Dragalina Corneliu,** București și **Bădulescu Vasile,** profesor lic. Șincai, București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

MIȘCAREA UNUI PUNCT SUB ACȚIUNEA UNOR FORȚE ELASTICE

de V. VALCOVICI.

Teoria vectorilor, instrument puternic de concentrare și de intuiție a Fizicei, și-a câștigat drepturi peste care nu se mai poate trece, în expunerea științelor mecanice și fizice cu mai toate ramurile lor. Totuși față de importanța pe care ar trebui să o aibă în aceste disciplini științifice, analiza vectorială nu e în deajuns cunoscută.

Sunt atâtea chestiuni de Mecanică de pildă care ar câștiga considerabil și în simplitate și în claritate dacă ar fi tratate în limbajul vectorial și care totuși târăsc cu ele tot arsenalul greoiu al celor trei ecuațiuni cartesiene, chiar în tratatele de Mecanică unde se vorbește despre teoria vectorilor.

Ca o ilustrație și ca un îndemn spre noua formă de expunere a Mecanicei îmi propun a trata problema cunoscută a mișcării unui punct material acționat de o forță elastică.

Voiu însemna vectorii prin câte o liniuță deasupra, iar derivata de ordinul n în raport cu timpul prin n puncte așezate tot deasupra.

1. Fie M punctul de masă m atras de centrul fix O proporțional cu distanța. Dacă $\bar{r}$ înseamnă vectorul $\overline{OM}$ atunci ecuația lui *Newton* de mișcare este:

$$m\ddot{\bar{r}} = -k\bar{r}, \tag{1}$$

k fiind coeficientul pozitiv de elasticitate.

Punând apoi $\nu^2 = \frac{k}{m}$, avem:

$$\ddot{\bar{r}} + \nu^2 \bar{r} = 0, \tag{1'}$$

adică o ecuație diferențială de ordinul al doilea a cărei integrală generală este:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 \cos \nu t + \bar{C}_2 \sin \nu t. \tag{2}$$

Constantele vectoriale de integrare $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ se determină prin condițiunile inițiale.

Dacă de pildă $\bar{r}_0$ și $\bar{v}_0$ sunt valorile vectorilor r și v la momentul $t = 0$, $\bar{v}$ fiind viteza mobilului, atunci relația (2) și derivata sa în raport cu timpul ne dau valorile lui $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$, încât relația (2) devine:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \nu t + \frac{\bar{v}_0}{\nu} \sin \nu t, \tag{2'}$$

care reprezintă în geometria vectorială o elipsă sub formă parametrică.

Cine nu-i deprins cu notațiile geometriei vectoriale se poate încredința de forma traiectoriei, traducând ecuația (2') în trei ecuații scalare—proețiile ei pe trei axe carteziene.

Dacă de pildă luăm O ca origine, OM_0 ca Ox, o paralelă la v_0 ca Oy și o perpendiculară pe planul xOy ca Oz, ecuația (2') va avea proecțiunile:

$$x = r_0 \cos \nu t$$

$$y = \frac{v_0}{\nu} \sin \nu t$$

$$z_0 = 0,$$

pe cele trei axe oblice de coordonate, de unde rezultă imediat forma traectoriei: o elipsă având dreptele Ox și Oy ca diametri conjugați.

Mișcarea este periodică cu perioada $\frac{2\pi}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ea reprezintă destul de bine mișcarea *electronului legat.*

Dacă în loc de atractivă, forța ar fi fost repulsivă, atunci soluția ar fi fost tot de forma (2) în care însă ar fi trebuit să înlocuim liniile trigonometrice cos și sin prin funcțiunile iperbolice ch și sh. Traiectoria ar fi fost o iperbolă, iar mișcarea aperiodică.

S'ar putea întâmpla ca fenomenul să aibă loc în câmpul unei forțe constante în mărime, direcție și sens (cum ar fi spre exemplu în câmpul gravitații sau al unei forțe magnetice constante). Suprapunerea celor două forțe — a forței elastice și a forței câmpului — ne dă ecuația:

$$\ddot{\bar{r}} + \nu^2 \bar{r} = \bar{g},$$

unde $\bar{g}$ înseamnă un vector constant. Ea se poate reduce la forma precedentă (1') dacă punem:

$$\bar{r} = \bar{g} + \bar{r}'.$$

Astfel obținem:

$$\ddot{\bar{r}}' + \nu^2 \bar{r}' = 0,$$

adică mișcarea se face ca și când punctul ar fi acționat de o forță elastică emanând din punctul $\bar{r} = \bar{g}$. Cazul forței repulsive se tratează, evident, la fel.

2. Să presupunem acum, reluând cazul forței atractive, că pe lângă această forță, punctul întâmpină o rezistență din partea mediului proporțională cu viteza. Ecuația lui *Newton* ne dă în acest caz:

$$\ddot{\bar{r}} + 2h\dot{\bar{r}} + \nu^2 \bar{r} = 0, \tag{3}$$

însemnând cu $-2hm\dot{\bar{r}}$ forța de frecare. Ecuația caracteristică corespunzătoare poate avea:

a) două rădăcini imaginare,
b) o rădăcină reală dublă,
c) două rădăcini reale.

a). In primul caz, punând:

$$\nu^2 - h^2 = \nu_1^2,$$

avem soluția:

$$\bar{r} = e^{-ht}(\bar{C}_1 \cos \nu_1 t + \bar{C}_2 \sin \nu_1 t), \tag{4}$$

unde constantele de integrare $\bar{C}_1$ și $\bar{C}_2$ se determină prin condițiunile inițiale ca mai sus. Se vede că vectorul

$$\bar{r}_1 = \bar{C}_1 \cos \nu_1 t + \bar{C}_2 \sin \nu_1 t$$

își mișcă extremitatea pe o elipsă. Rezultă că vectorul $\bar{r}$ își mișcă extremitatea pe o spirală de oarece avem:

$$\bar{r} = e^{-ht}\bar{r}_1.$$

O aceiași rază vectoară este întâlnită de traiectoria (4) la distanțele:

$$r = e^{-ht}r_1,\ e^{-\frac{2\pi}{\nu_1}}e^{-ht}r_1,\ e^{\frac{4\pi}{\nu_1}}e^{-ht}r_1, \ldots \text{ etc.}$$

de originea O, adică spirala tae raza vectoară la distanțe care descresc într'o progresie geometrică având decrementul logaritmic $\frac{2\pi}{\nu_1}$.

Mișcarea aceasta este aceia a *electronului legat într'un mediu fluid rezistent.*

b). Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină reală dublă atunci ecuația (3) are soluția:

$$\bar{r} = e^{-ht}(\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t),$$

adică punctul își începe mișcarea din poziția $\bar{r} = \bar{C}_1$ și se apropie de origine pe o ramură de curbă deschisă, fără a cădea în O vre-odată.

c). In fine dacă ecuația caracteristică are două rădăcini reale.

Cum ambele aceste rădăcini α_1 și α_2 sunt negative soluția care va fi de forma:

$$\bar{r} = \bar{C}_1 e^{\alpha_1 t} + \bar{C}_2 e^{\alpha_2 t},$$

va reprezenta ca și în cazul *b)* mișcarea asimptotică a unui punct înspre originea O.

In toate aceste trei cazuri se poate presupune ca mai sus că fenomenul are loc în câmpul unei forțe constante $m\bar{g}$. Această suprapunere ar determina o deplasare $\bar{r} = \bar{g}$ a centrului O de forțe atractive sau repulsive.

3. Să considerăm, ca o generalizare imediată a problemei tratate, cazul unui punct material M atras sau respins de n centre fixe $A_1, A_2, \ldots A_n$, proporțional cu distanța.

Insemnând cu $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots \bar{r}_n$ vectorii $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \ldots \overline{OA_n}$ și cu $k_1, k_2, \ldots k_n$ coeficienții de proporționalitate pozitivi sau negativi, vom avea pentru mișcarea punctului M, ecuația:

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^{n} k_i(\bar{r} - \bar{r}_i). \tag{5}$$

Presupunând mai întâi:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0,$$

putem determina un vector $\bar{\rho}$ aşa fel încât să avem relaţia:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \bar{r}_i = \bar{\rho} \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Ecuaţia (5) devine:

$$m\bar{\bar{r}}' = \bar{r}' \sum_{i=1}^{n} k_i, \qquad (5')$$

unde am pus:

$$\bar{r}' = \bar{r} - \bar{\rho}.$$

Ecuaţia (5') are forma ecuaţiei (1) deci se poate integra în mod analog.

Deducem că mişcarea punctului M este identică cu aceia pe care ar lua-o dacă ar fi acţionat de o forţă proporţională cu distanţa emanând din punctul $\bar{r} = \bar{\rho}$, coeficientul de proporţionalitate fiind

$$\sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Dacă însă avem:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 0,$$

atunci ecuaţia (5) ne spune că punctul M este solicitat de o forţă constantă în mărime, direcţie şi sens, egală anume cu $\sum_{i=1}^{n} k_i \bar{r}_i$, încât traiectoria va fi o parabolă care va fi descrisă după legile căderii corpurilor grele în vid.

NOTE MATEMATICE

17. *Generalizarea problemei de mecanică No. 16, pag. 3, din: „Culegere de probleme" de mecanică de A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica.*

Problema este următoarea: Dacă se ia rezultanta $\bar{R}$ a două forţe concurente $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$, apoi rezultanta $\bar{S}$ a forţelor $\bar{F}_1$ şi $\bar{R}$, în fine rezultanta $\bar{T}$ a forţelor $\bar{F}_2$ şi $\bar{R}$, în fine rezultanta $\bar{T}$ a forţelor $\bar{F}_2$ şi $\bar{R}$ avem: $\bar{S}^2 + \bar{T}^2 = \bar{F}_1^2 + \bar{F}_2^2 + 4\bar{R}^2$.

Problema mai generală este: *Fie un sistem de forţe* $\bar{F}_i\ (i=1\ldots n)$ *de rezultantă* $\bar{R}$; *dacă* $\bar{\rho}_i\ (i=1\ldots n)$ *este rezultanta forţelor* $\bar{F}_i$ *şi* $\bar{R}$ *avem relaţia:*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \bar{\rho}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i^2 + (n+2)\bar{R}^2.$$

Avem, întrebuinţând notaţiile vectoriale cunoscute:

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_1 = \bar{F}_1 + \bar{R} \text{ sau scalar: } \bar{\rho}_1^2 = \bar{F}_1^2 + 2\bar{F}_1.\bar{R} + \bar{R}^2 \\
&\bar{\rho}_2 = \bar{F}_2 + \bar{R} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \bar{\rho}_2^2 = \bar{F}_2^2 + 2\bar{F}_1.\bar{R} + \bar{R}^2 \qquad (1) \\
&\ldots\ldots \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \ldots\ldots\ldots \\
&\bar{\rho}_n = \bar{F}_n + \bar{R} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \bar{\rho}_n^2 = \bar{F}_n^2 + 2\bar{F}_n.\bar{R} + \bar{R}^2
\end{aligned}$$

Adunând relaţiile (1) avem:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \bar{\rho}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i^2 + 2(\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n) +$$

$$n\bar{R}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i^2 + (n+2)\bar{R}^2,$$

căci $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n$, ceiace era de dovedit.

Problema No. 16 este cazul $n = 2$:

$$\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 = \bar{F}_1^2 + \bar{F}_2^2 + 4\bar{R}^2.$$

***

DILI C. SCHILERU
Şc. Polit. Timişoara.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 3, Noembrie 1924. Aşezarea în ordine naturală a rădăcinelor a două ecuaţii, una de gradul al treilea şi una de gradul al doilea, de *Th. Angheluţă*. Asupra ecuaţiei pitagorice $Z^2 = X^2 + Y^2$, de *Leonida Penenjchevici*.

2. *Foaia Matematică*, anul I, No. 11, Noembrie, 1924. Desvoltarea unui determinant cu generalizarea unor probleme cunoscute, de *Leon Weiss*.

3. *Viaţa şcolară*, anul I, No. 1, Noembrie, 1925, costul 8 lei.

Este o revistă tipărită, a Societăţii de lectură *D. Ţichindeal*, şi a Cercului matematic *„T. Lalescu"*; societăţi în care sunt grupaţi elevii cursului superior dela liceul *„Diaconovici Loga"* din *Timişoara*. Primul număr apărut, are 24 pag. şi cuprinde: o parte literară; proză şi versuri,

și o parte matematică anume: Combinări și aranjări cu repetiție și permutări cu elemente egale, de *I. Orbonaș*, Note, recreații și probleme propuse. Avem cuvinte de laudă și încurajare pentru acest gen de manifestare și recomandăm călduros Revista, elevilor altor licee. Abonamentul pe an costă 50 lei, și se trimete pe adresa: *Liceul Diaconovici-Loga, Timișoara, pentru „Viața Școlară"*.

PROBLEME REZOLVATE

272. — *Fie* AH *înălțimea triunghiului* ABC. *Să se arate că suma razelor cercurilor înscrise în triunghiurile* ABC, ABH *și* AHC *este egală cu* AH.

VASILIU ION

Soluție dată de d-l: *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București).

Vom arăta că proprietatea enunțată, e valabilă numai când triunghiul ABC este dreptunghic în A. In adevăr, fie ABC un triunghiu oarecare, AH înălțimea vârfului A. Cu notațiile obicinuite avem:

$$r = \frac{s}{p} = \frac{BC \times AH}{AB + BC + AC}.$$

Apoi în triunghiurile dreptunghice AHB și AHC, razele r_1 și r_2 ale cercurilor înscrise au expresiunile:

$$r_1 = \frac{AH + BH - AB}{2}, \quad r_2 = \frac{AH + CH - AC}{2}$$

și atunci:

$$r + r_1 + r_2 = AH + \frac{BC}{2} - \frac{AB + AC}{2} + \frac{BC \times AH}{AB + BC + AC}$$

și pentru că vrem ca: $r + r_1 + r_2 = AH$, trebue ca:

$$\frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{BC \times AH}{AB + BC + AC}$$

$$\overset{*}{**} \quad p - a = \frac{s}{p} = r,$$

relație care nu există de cât dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, căci într'un triunghiu oarecare, având

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

ca să avem: $r = p - a$, trebuie ca $\frac{A}{2} = 45^0$ sau $A = 90^0$.

Au demonstrat relația cerută, considerând dela început triunghiul ABC dreptunghic în A, d-nii: *Bârglăzan Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Cioränescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Ion* (lic. Chișinău), *Flickstein I.* (Cernăuți), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Hotăran Teodor* (student), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Pârvulescu Titus* (lic. M-rea Dealu), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Șerbănescu I. Virgil* (lic. M-rea Dealu), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatiu Mihail* (student), *Șușelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasilescu Mircea* (lic. Giurgiu) și *Vlăduțu Sabin* (lic. M-rea Dealu).

S'au primit în ultimul timp soluții dela d-l: *Budișteanu Al.* (lic. M-rea Dealu).

278. — *Se cere restul diviziunii numărului*

$$159^{951}$$

prin 951.

EMIL STEFANESCU

Observând că $159 = 3 \times 53$ și $951 = 3 \times 317$, putem scri evident:

$$159^{951} = 3^3 (3^3)^{316} \cdot (53^{317})^3.$$

Conform teoremei lui *Fermat*, avem:

$$(3^3)^{316} = M \cdot 317 + 1, \quad 53^{317} = M \cdot 317 + 53$$

și atunci:

$$159^{951} = 3 \cdot 9 \cdot (M \cdot 317 + 1)(M \cdot 317 + 53^3) =$$

$$3 \cdot (M \cdot 317 + 9)(M \cdot 317 + 53^3) = 3 \cdot (M \cdot 317 + 9 \times 53^3)$$

$$= M \cdot 951 + 27 \times 53^3.$$

Cum:

$$27 \times 53^3 = 27 \times 53 \times 53^2 = 1431 \times 2809$$

$$= M \cdot 951 + 480\,(M \cdot 951 - 44 = M \cdot 951 - 21120$$

$$= M \cdot 951 + 753.$$

Restul căutat este deci 753.

Soluție dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bocancea I. Kirilă* (lic. Tg.-Mureș), *Iliescu St. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu). *Mitescu Dem.-Remdeeth* (lic. Tg.-Mureș), *Moroianu I. At.* (lic. Constanța), *Nicolescu V. Vasile* (lic. Tg.-Mureș), *Șerbănescu I. Virgil* (lic. M-rea Dealu), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Toma Nicolae* (lic. Tg.-Mureș) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

316. — *Să se demonstreze identitatea:*

$$\sum\sqrt{\frac{r_a-r}{r_b+r_c}}=2\,\frac{r_a+r_b+r_c}{a+b+c}$$

notațiile fiind cele obicinuite.

N. A. Stanescu.

Prima soluție. Folosind relațiile cunoscute:

$$r=\frac{S}{p},\quad r_a=\frac{S}{p-a},\quad r_b=\frac{S}{p-b},$$

$$r_c=\frac{S}{p-c},\quad 2p=a+b+c,$$

putem scrie succesiv:

$$\sum\sqrt{\frac{r_a-r}{r_b+r_c}}=\sum\sqrt{\frac{\frac{S}{p-a}-\frac{S}{p}}{\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}}}=$$

$$\sum\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sum\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

$$=\sum\frac{S}{p(p-a)}=\sum\frac{r_a}{p}=2\,\frac{r_a+r_b+r_c}{a+b+c}$$

Soluțiuni bune date de d-nii: *Apătean Camil* (lic. Arad), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Beatris Blasco* [Lugoj], *Beju O. Traian* [lic. Arad], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Boju Rosetel* [lic. Timișoara], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Constantinescu Gr. Ion* [Buzău], *Corșoreanu Gh. Gheorghe* [lic. Tg.-Jiu], *Critz D. M.* [lic. Mihai-Viteazul, București], *David I. Ioan* [Buzău], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iași], *Dumitrescu Gh. Marin* [lic. Craiova], *Filipescu D. Eugeniu* [lic. M-rea Dealu], *Gabrielescu C. Vasile* [lic. Brăila] *Gârleșteanu Mihail* [lic. Timișoara], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Ghinicescu I. Gheorghe* [lic. Internat, Iași], *Gradiny I. Gheorghe* [lic. Câmpina], *Grofșorean I. Gheorghe* [lic. Arad], *Herscovici Emanoil* [lic. Galați], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Lăzărescu M. Vasile* [lic. Giurgiu], *Liuba Gh.* [lic. Arad], *Marinescu I. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Mitran St. Grigore* [Craiova], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Rălescu Maria* [București], *Râmniceanu L. Radu* [lic. Tg.-Jiu], *Samoilă D-tru* [lic. Câmpina], *Săbău Hortensia* [lic. Arad], *Silion Gh. Ion* [lic. Brașov], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spacu Gh. Petru, Stoica N. Aureliu* [lic. Cantemir, București], *Șușelescu N. Ion* [lic. M-rea Dealu] și *Tărăbuță C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, București].

S'au primit în ultimul timp soluții dela d-nii: *Budișteanu Al.* [lic. M-rea Dealu], *Manoil Adolf* [lic. Roman] și *Nicolau C.* [lic. R.-Sărat].

Soluția a 2-a. Sunt cunoscute formulele (Compléments de Trig. par „F. G. M." pag. 179 și 176.

$$r_a-r=4R\sin^2\frac{A}{2},\quad r_b+r_c=4R\cos^2\frac{A}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a}{p}$$

Putem deci scri:

$$\sum\sqrt{\frac{r_a-r}{r_b+r_c}}=\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sum\frac{r_a}{p}=2\,\frac{r_a+r_b+r_c}{a+b+c}$$

ceiace era de dovedit.

Soluții analoage date de d-nii: *Beju O. Traian* [lic. Arad], *Blumenfeld M. David* [lic. Botoșani], *Botea Gh. Nicolae* [lic. Cantemir, București], *Epure T. Ștefan* [Buzău], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iași], *Grofșoreanu I. Gheorghe* [lic. Arad], *Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iași], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iași], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Popp I. Emilian* [lic. M-rea Dealu], *Samoilă D-tru* [lic. Câmpina], *Teodorescu D-tru* [lic. Mihai-Viteazul, București] *Tunaru R. Traian* [Craiova], *Vlațiu L. Laurențiu* [Constanța] *și Weiss Solomon* [lic. Galați].

321. — *Să se afle limita expresiunei:*

$$\frac{\sqrt[3]{15x+19}-\sqrt{25-x^2}}{x-\sqrt[3]{4x^2-9}}$$

când x tinde către 3, fără a folosi regula lui Hôpital.

M. Vasiliu

Când x tinde către 3, expresia dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Pentru a ridica nedeterminarea, scrim expresia dată E sub forma:

$$E=\frac{(\sqrt[3]{15x+19}-\sqrt[3]{64})-(\sqrt{25-x^2}-\sqrt{16})}{x-3-(\sqrt[3]{4x^2-9}-\sqrt[3]{27})}$$

Dar observăm că:

$$\sqrt[3]{15x+19}-\sqrt[3]{64}$$

$$=\frac{15(x-3)}{\sqrt[3]{(15x+19)^2}+\sqrt[3]{64(15x+19)}+\sqrt[3]{64^2}}$$

$$(1)\qquad \sqrt{25-x^2}-\sqrt{16}=\frac{9-x^2}{\sqrt{25-x^2}+\sqrt{16}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4x^2-9}-\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{(4x^2-9)^2}+\sqrt[3]{27(4x^2-9)}+\sqrt[3]{27^2}}$$

Substituind în expresiunea E, expresiunile parantezelor cu valorile lor date de relațiile (1), observăm că putem simplifica cu $x-3$; în urmă facem $x=3$ și găsim:

$$\lim_{x=3} E=\frac{\frac{15}{48}+\frac{6}{8}}{1-\frac{24}{27}}=\frac{153}{16}$$

Soluții date de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Cristea Aurel* (lic. Focșani), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *I. N. Georgescu-Val.* (Subl. Dadilov), *Goldstein N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Grigore T. V.* (lic. Tg.-Jiu), *Gradiny I. Gheorghe, Grofșoreanu I. Gheorghe, Herscovici Emanoil* (lic. Galați), *Ianculescu Octavian* (abs. al Șc. Industriale, Timișoara), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu P. Angelo* (Cluj), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Neumann Maria* (Cluj), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Silion Gh. Ioan* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Ștefănescu Emil, Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Vasiliu Gh.* (lic. Timișoara) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

In ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: *Coman Onoriu* (lic. Arad), *Marius Mariș* (lic. Arad) *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Musta St.* (Cluj), *Petrescu N. D-tru* (București) și *Stamatiu Mihail.*

327. — *Doi călători au la dispoziție o singură bicicletă pentru a străbate o distanță dată. Amândoi pornesc deodată, unul pe bicicletă celălalt pe jos. După câtva timp, primul părăsește bicicleta și-și continuă drumul pe jos iar cel d'al doilea întrebuințează bicicleta din momentul când o ajunge. Cum trebue să-și împartă distanța pentru ca timpul scurs până când ambii se vor găsi în punctul final să fie cel mai scurt posibil?*

V. VALCOVICI

Fie v_1 și v'_1 vitesele persoanei A respectiv pe jos și cu bicicleta iar v_2 și v'_2 vitesele corespunzătoare persoanei B. Vom presupune că atât A cât și B merg mai repede cu bicicleta de cât pe jos adică:

$$(1)\qquad v_1<v'_1,\quad v_2<v'_2.$$

Fie a distanța de străbătut, x distanța străbătută de primul pe jos. Atunci timpul t_1 întrebuințat de persoana A pentru a străbate distanța a este:

$$(2)\qquad t_1=\frac{x}{v_1}+\frac{a-x}{v'_1}$$

Persoana B va pune timpul:

$$(3)\qquad t_2=\frac{x}{v'_2}+\frac{a-x}{v_2}.$$

Se poate întâmpla ca t_1 să nu fie egal cu t_2. In acest caz timpul scurs până când A și B se vor găsi în punctul final este evident cel mai mare dintre t_1 și t_2.

Să facem deocamdată ipoteza normală, că A merge mai repede cu bicicleta de cât B pe jos și că B merge deasemenea mai repede cu bicicleta decât A pe jos. Vom avea așa dar:

$$(4)\qquad v_1<v'_2,\quad v_2<v'_2.$$

Să presupunem acum problema rezolvată. La distanța x găsită vor corespunde valorile t_1 și t_2. Vom arăta că aceste două valori trebue să fie egale.

Intr'adevăr dacă t_1 este mai mare ca t_2 atunci t_1 reprezintă chiar timpul minim cerut. Insă micșorând pe x vom obține valori mai mici pentru t_1 și mai mari pentru t_2 rămânând totuși $t_1>t_2$. Rezultă că în ipotesa (4) vom avea neapărat

$$t_1=t_2,$$

adică, ținând seama de formulele (2) și (3):

$$\frac{x}{v_1}+\frac{a-x}{v'_1}=\frac{x}{v'_2}+\frac{a-x}{v_2}$$

Deducem:

$$x=\frac{\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v'_1}}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v'_1}-\frac{1}{v'_2}}\,a,$$

şi

$$t_1 = t_2 = \frac{\frac{1}{\nu_1 \nu_1} - \frac{1}{\nu'_1 \nu'_2}}{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu'_1} - \frac{1}{\nu'_2}} a.$$

Pentru cazul particular când am avea

$$\nu_1 = \nu_2, \quad \nu'_1 = \nu'_2,$$

x şi t_1 devin:

$$x = \frac{a}{2}, \quad t_1 = t_2 = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu'_1}\right)$$

adică timpul minim se obţine dacă fiecare merge o jumătate din distanţă pe jos şi o jumătate cu bicicleta.

Să considerăm acum cazul anormal când A ar merge mai repede pe jos decât B cu bicicleta adică:

$$\nu_1 > \nu'_2.$$

Atunci evident că timpul minim în care B ar străbate distanţa dată ar fi $t_2 = \frac{a}{\nu'_2}$ având bicicleta pe toată distanţa. A ar face distanţa dată pe jos în timpul $t_1 = \frac{a}{\nu'_1}$ mai mic decât t_2.

In mod analog, dacă B ar merge mai repede pe jos de cât A cu bicicleta, am avea::

$$\nu_2 > \nu'_1,$$

iar timpul minim cerut ar fi:

$$t_1 = \frac{a}{\nu'_1}$$

pus de A pentru a străbate distanţa toată cu bicicleta.

S'au primit soluţiuni necomplecte din partea d-lor: *Ardelea R., Berdan C., Botea C., Braiester O., Drăghiceanu M., Flickstein J., Goldstein N., Gradiny G., Huzuneanu G., Mătăsaru D., Mihăilescu R., Miu I., Pătroianu M., Percea V., Petrescu A., Roşu A., Robinsohn C., Spârchez Z., Stamatescu V., Şuşelescu I., Tăraş V., Vasiliu G., Vasiliu I., Vlădea I., Vulpanovici B., Wallechner E.*

333. — *Să se afle limita expresiei:*

$$u = \frac{y^2 \sin(x-a) + x^2 \sin(y-b)}{y \operatorname{tg}(x-a) + x \operatorname{tg}(y-b)},$$

pentru $x = a$, $y = b$ *soluţiuni a ecuaţiei:*

$$e^{x-a} + e^{y-b} + x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - 2 = 0$$

V. ALACI.

Observăm că pentru $x = a$, $y = b$ expresia dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, şi că suntem în condiţiile enunţului dela punctul 2 al articolului: *„O clasă de expresiuni nedeterminate“ din* „R. M. T.“, an. IV, No. 1.

Putem dar folosi formula (4) stabilită în acel articol, care ne procură limita cerută pentru u, când ea există; anume:

$$(1) \qquad u = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \Psi'_x(x_1, y_1) & \Psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \Psi''_x(x_1, y_2) & \Psi''_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}$$

unde:

$$f(x, y) = y^2 \sin(x-a) + x^2 \sin(y-b),$$

$$\varphi(x, y) = y \operatorname{tg}(x-a) + x \operatorname{tg}(y-b),$$

$$\Psi(x, y) = e^{x-a} + e^{y-b} + x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - 2,$$

iar $x_1 = a$, $y_1 = b$.

In cazul nostru putem deci scri:

$$f'_x(x, y) = y^2 \cos(x-a) + 2x \sin(y-b),$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin(x-a) + x^2 \cos(y-b)$$

$$\varphi'_x(x, y) = \frac{y}{\cos^2(x-a)} + \operatorname{tg}(y-b)$$

$$\varphi'_y(x, y) = \operatorname{tg}(x-a) + \frac{x}{\cos^2(y-b)}$$

$$\Psi''_x(x, y) = e^{x-a} + 2x, \quad \Psi''_y(x, y) = e^{y-b} + 2y.$$

Atunci:

$$f'_x(x_1, y_1) = f'_x(a, b) = b^2, \quad f'_y(x_1, y_1) = f'_y(a, b) = a^2,$$

$$\varphi'_x(x_1, y_1) = \varphi'_x(a, b) = b, \quad \varphi'_y(x_1, y_1) = \varphi'_y(a, b) = a,$$

$$\Psi''_x(x_1, y_1) = \Psi''_x(a, b) = 2a + 1,$$

$$\Psi''_y(x_1, y_1) = \Psi''_y(a, b) = 2b + 1.$$

Formula (1) atunci ne dă:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} b^2 & a^2 \\ 2a+1 & 2b+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a \\ 2a+1 & 2b+1 \end{vmatrix}} = \frac{2(b^3 - a^3) + b^2 - a^2}{2(b^2 - a^2) + b - a}$$

$$= \frac{2(a^2 + ab + b^2) + a + b}{2(a+b) + 1} = b + \frac{a(1+2a)}{1 + 2(a+b)}$$

care este limita expresiei date pentru $x = a$, $y = b$.

Soluții bune date de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis N. Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Boju Rosetel* (lic. Timișoara), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Botis E. Virgil* (Șc. Polit Timișoara), *Cârsteanu Traian* (Șc. Polit. Timișoara), *Al. Comănescu-Bălteni* (lic. Slatina), *Crașovean Vasile* (Șc. Polit. Timișoara), *Dânga G. Vlad* (lic. Orheiu), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *Frătici I.* (Șc. Polit. Timișoara), *I. N. Georgescu-Val* (sublocot. Dadilov), *Gherbanowscky F. Nicolae* (lic. Orheiu), *Goldștein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit. Timișoara), *Grofșoreanu I. Gheorghe*, *Herscovici Emanoil* (Galați), *Ionescu I. Nicolae* (lic. Pitești), *Iorgu Avram* (lic. Bacău), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Mihăilescu-Romeo* (R.-Vâlcea), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Obreja I.*, *Pasco Wilhelm* (Cernăuți), *Pascu D.* (lic. Brașov), *Popescu N. Niculai* (lic. Câmpina), *Popovici Aurel* (li . Focșani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Șeitan Ion* (lic. Brașov), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Șerban I. Tiberiu* (Șc. Polit. Timișoara), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit. Timișoara), *Staicu I.* (lic. Brașov), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Pedag. București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie), *Wagner W. I.* (lic. Craiova) și *Wallechner Emil* (Govora).

339. — *Să se determine coeficienții a, b, c ai ecuației:*

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

știind că suma și produsul lor sunt egale respectiv cu suma și produsul rădăcinilor ecuației Să se rezolve apoi ecuația.

Cap. I. Lintes

Soluție dată de d-nii: *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București) și *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București).

Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinele ecuației date, conform enunțului avem::

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = a + b + c \\ x_1 x_2 = a b c \end{cases}$$

De altă parte, relațiile între rădăcini și coeficienți ne permit a scri:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Din (1) și (2), deducem:

$$(3) \qquad \begin{cases} a + b + c = -\dfrac{b}{a} \\ a b c = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

A doua relație din (3), se poate scri:

$$c\left(a b - \frac{1}{a}\right) = 0,$$

de unde deducem: $c = 0$, sau $b = \dfrac{1}{a^2}$

1. Dacă luăm $c = 0$, prima relație din (3) ne dă:

$$a + b + \frac{b}{a} = 0,$$

$$\overset{*}{**} \quad b = -\frac{a^2}{a+1}$$

în care caz, ecuația dată, este:

$$a x^2 - \frac{a^2}{a-1} x = 0 \text{ sau: } x^2 - \frac{a}{a+1} x = 0,$$

cu rădăcinele: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{a}{a+1}$.

2, Dacă luăm însă: $b = \dfrac{1}{a^2}$, prima relație din (3) ne dă:

$$a + \frac{1}{a^2} + c = -\frac{1}{a^3}$$

$$\overset{*}{**} \quad c = -\frac{a^4 + a + 1}{a^3}$$

și în acest caz ecuația dată, este:

$$a x^2 + \frac{1}{a^2} x - \frac{a^4 + a + 1}{a^3} = 0,$$

sau:

$$a^4 x^4 + a x - (a^4 + a + 1) = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4 a^4 (a^4 + a + 1)}}{2 a^4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{4 a^6 + 4 a^3 + 4 a^2 + 1}}{2 a^3}$$

Au tratat numai punctul 2, d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Agapescu M. Nicolae* (Sem. Pedag. Iași), *Bosie Valeriu* (Șc. Polit. Timișoara), *Braiester I. Otto* (lic.

Național, Iași), *Al. Comănescu-Bălteni* (lic. Slatina), *Florea C. Alexandru* (lic. Național, Iași), *Frătici Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Pedag. București), *Goldtsein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Tigoiu Z. Ioan* (Șc. Sup. de Comerț, Constanța).

S'au primit în ultimul timp soluții dela d-nii: *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal) și *Olariu T. Enea* (Șc. Polit. Timișoara).

349. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z+xy+xz+yz+xyz=209 \\ x+y+t+xy+xt+yt+xyt=119 \\ x+z+t+xz+xt+zt+xzt=139 \\ y+z+t+yz+yt+zt+yzt=167 \end{cases}$$

V. COSNITA.

Soluție dată de d-nii: *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov) *Ianculescu Octavian* (Șc. Industrială, Timișoara), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București) și *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu).

Adunând 1 în ambii membri ai primei ecuații, o putem scri:

$$(x+1)+y(x+1)+z(x+1)+yz(x+1)=210,$$

sau: $$(x+1)(yz+y+z+1)=210$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)=2\times3\times5\times7$$

Procedăm la fel cu celelalte ecuații, și atunci sistemul dat, devine:

$$(1)\quad \begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1)=2\times3\times5\times7 \\ (x+1)(y+1)(t+1)=2^3\times3\times5 \\ (x+1)(z+1)(t+1)=2^3\times5\times7 \\ (y+1)(z+1)(t+1)=2^3\times3\times7 \end{cases}$$

Multiplicând aceste ecuații găsim:

$$\left[(x+1)(y+1)(z+1)(t+1)\right]^3=2^9\times3^3\times5^3\times7^3$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)(t+1)=2^3\times3\times5\times7\times\sqrt[3]{1}$$

Cum: $\sqrt[3]{1}=1$, sau $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, unde $i=\sqrt{-1}$, rezultă că:

$$(3)\qquad (x+1)(y+1)(z+1)(t+1)=840$$

$$(4)\qquad (x+1)(y+1)(z+1)(t+1)=420(-1\pm i\sqrt{3})$$

Divizând ecuațiile (3) și (4) succesiv cu ecuațiile sistemului (1), deducem ușor:

$$\begin{cases} t+1=4 \\ z+1=7 \\ y+1=6 \\ x+1=5 \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} t+1=2(-1\pm i\sqrt{3}) \\ z+1=\frac{7}{2}(-1\pm i\sqrt{3}) \\ y+1=3(-1\pm i\sqrt{3}) \\ x+1=\frac{5}{2}(-1\pm i\sqrt{3}) \end{cases}$$

De unde deducem următoarele sisteme de soluții:

$$(5)\quad \begin{cases} x=4 \\ y=5 \\ z=6 \\ t=3 \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} x=\frac{-7\pm5i\sqrt{3}}{2} \\ y=-4\pm3i\sqrt{3} \\ z=\frac{-9\pm7i\sqrt{3}}{2} \\ t=-3\pm2i\sqrt{3} \end{cases}$$

Au găsit numai sistemul de soluții reale (5), d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Craiova), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Ciorănescu C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Al. Comănescu-Bălteni*, *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Frătici Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu I. Paul*, *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Roșu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *și Velea Gr. Mihail* (lic. Craiova).

Observare. — 1. D-nii: *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), au considerat un sistem mai general, analog cu cel dat și care descompus în factori, devine:

$$\begin{cases} (y+b)(z+c)(t+d)=A \\ (x+a)(z+c)(t+d)=B \\ (x+a)(y+b)(t+d)=C \\ (x+a)(y+b)(z+c)=D \end{cases}$$

sistem care să rezolvă ca și cel dat.

2. D-nii: *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), şi *Popovici Aurel* (lic. Focşani), au considerat sistemul mai general:

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(x_k+1)}{x_i+1}=A_i,\quad i=1,\ 2,\ldots n,$$

sistem care se rezolvă ca şi cel dat.

355. — *Sa se verifice identitatea:*

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & 4ab & 2b^2 & 3a^2 & 3ab & 3b^2 \\ 2b^2 & 2a^2 & 4ab & 3b^2 & 3a^2 & 3ab \\ 4ab & 2b^2 & 2a^2 & 3ab & 3b^2 & 3a^2 \\ a^2 & 2ab & b^2 & 2a^2 & 2ab & 2b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab & 2b^2 & 2a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 & 2ab & 2b^2 & 2a^2 \end{vmatrix} = (a^6-b^6)^2$$

N. BOTEA

Soluţie dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Bleiweiss Paul* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Bogdan Gh. Mihai* (lic. Internat, Iaşi), *Brüll Leon*, *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Grofşoreanu I. Gheorghe* şi *Penţia Aurel* (Şc. Polit. Timişoara).

Scădem pe rând respectiv liniile 4, 5, 6 din 1, 2, 3 şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab & b^2 & a^2 & ab \\ 2ab & b^2 & a^2 & ab & b^2 & a^2 \\ a^2 & 2ab & b^2 & 2a^2 & 2ab & 2b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab & 2b^2 & 2a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 & 2ab & 2b^2 & 2a^2 \end{vmatrix}$$

In acest determinant scădem pe rând liniile 1, 2, 3 respectiv din limite 4, 5, 6 şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab & b^2 & a^2 & ab \\ 2ab & b^2 & a^2 & ab & b^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & ab & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 & a^2 & ab \\ 0 & 0 & 0 & ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

Dacă şi aci scădem pe rând coloanele 1, 2, 3 respectiv din 4, 5, 6, obţinem:

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2 & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ 2ab & b^2 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & ab & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 & a^2 & ab \\ 0 & 0 & 0 & ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

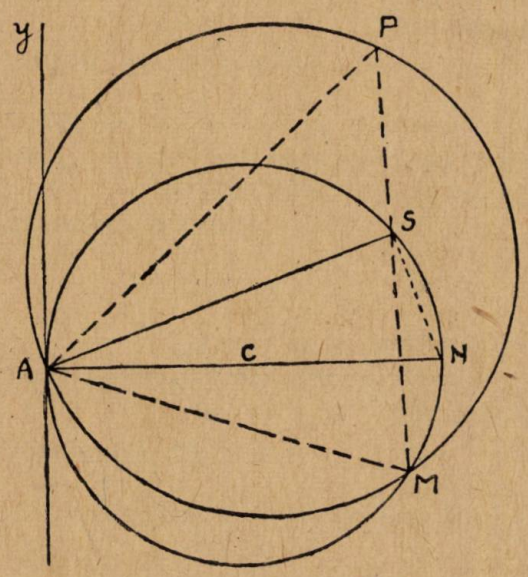
$$= (a^3+b^3)^2(a^3-b^3)^2 = (a^6-b^6)^2.$$

Identitatea dată este astfel verificată.

Soluţii mai lungi date de d-nii: *Ardelea Radu* (Sinaia), *Beju Traian* (lic. Arad), *Căldăraru Leon* (lic. Şincai, Bucureşti), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Marini Paul* (student, Cluj), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Segârceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti) *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov) şi *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

356.—*Se dă un cerc* C *şi o secantă* AS—*punctele* A *şi* S *pe cerc. Un punct* P *în planul cercului. Dacă* M *e punctul unde* SP *taie din nou cercul* C, *se cere locul lui* M, *când centrul* C *se plimbă pe dreapta* AC *şi cercul trece prin* A.

ION PROTOPOPESCU



Soluţie geometrică dată de d-nii : *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Pamula Alexandru* (Botoşani), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu) şi *Tăraş Vasile* (lic. Braşov).

Fie N punctul diametral opus lui A. Conform enunţului $\overset{\frown}{SAC}$ este constant, rezultă că şi, $\overset{\frown}{SNA} = 90^0 - \overset{\frown}{SAC}$ este constant.

Cum $\overset{\frown}{SMA} = \overset{\frown}{SNA}$ ca fiind înscrise în acelaşi segment de cerc, urmează că $\overset{\frown}{SMA}$ sau $\overset{\frown}{PMA}$ este constant.

Punctele A şi P fiind fixe şi $\overset{\frown}{SMA}$ constant, urmează că locul lui M este întregul cerc descris pe AP şi capabil de $\overset{\frown}{SNA}$ sau $\left(\pi - \overset{\frown}{SNA}\right)$.

Soluţie analitică dată de d-nii : *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Luăm A ca origină, AN şi Ay ca axe de coordonate.

Fie (a, b) coordonatele punctului fix P, $(r, 0)$, coordonatele variabile ale cercului C şi m coeficientul unghiular dat, al dreptei AS. Ecuaţia cercului C este :

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0. \tag{1}$$

Ecuaţia dreptei AS, este :

$$y = mx, \tag{2}$$

Rezolvind ecuaţiile (1) şi (2), găsim coordonatele punctului S. Inlocuind valoarea lui y din (2), în (1), găsim :

$$(1 + m^2)x^2 - 2rx = 0.$$

De unde : $x = 0$ şi $x = \dfrac{2r}{1 + m^2}$.

Atunci coordonatele lui S sunt :

$$\left(\frac{2r}{1+m^2}, \frac{2mr}{1+m^2}\right)$$

Acum ecuaţia dreptei PS este :

$$\frac{x-a}{2r - a(1+m^2)} = \frac{y-b}{2mr - b(1+m^2)} \tag{3}$$

Pentru a găsi locul punctului M, trebuie a găsi intersecţia cercului C şi a dreptei (3), şi în urmă a elimina pe r din expresiile coordonatelor punctului M, ceiace e tot una a elimina direct pe r între ecuaţiile (1) şi (3).

Cum ecuaţia (3) se mai poate scri :

$$2r(mx - ma - y + b) - bx(1+m^2) + ay(1+m^2) = 0 \tag{4}$$

şi cum din (1), $2r = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$.

relaţia (4) se poate scri :

$$(x^2 + y^2)(mx - y) - ma x^2 - ma y^2 + by^2 - bm^2 x^2 + axy + am^2 xy = 0$$

sau : $(x^2 + y^2)(mx - y) - mx(ax + bmx - amy + by) + y(ax + bmx - amy + by) = 0$

$$(x^2 + y^2)(mx - y) - (mx - y)(ax + bmx - amy + by) = 0.$$

Simplificând cu, $mx - y$, găsim :

$$x^2 + y^2 - (a + bm)x - (b - am)y = 0.$$

Locul este deci un cerc ce trece prin origina A, cu centru $\left(\frac{a+bm}{2}, \frac{b-am}{2}\right)$, care trece și prin P.

PROBLEME PROPUSE

403. — Trei trenuri pleacă pe rând dintr'o stație în aceiași direcție, având aceleași opriri. La un moment dat ele au parcurs următoarele distanțe: primul 180 km.; al doilea 135 km.; și al treilea 15 km.

După câți km. de mers din acest moment, suma distanțelor (socotite dela stația de origină) parcurse de ultimele două trenuri este egală cu distanța parcursă de primul?

SUBLOCOT. I. M. IONIȚA

404. — p fiind un număr prim, să se arate că:

$$p!$$

e divizibil prin:

$$(p-1)+2(p-2)+3(p-3)\ldots+(p-1)\left[p-(p-1)\right]$$

POPOVICI C. C-TIN

405. — Se dă triunghiul A B C înscris în cercul O. Se ia punctul D pe arcul A C și E pe arcul A B, astfel ca:

$$\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{EB}$$

Să se dovedească că bisectoarea unghiului A este perpendiculară pe E D.

V. ALACI

406. — Din vârfurile A, B, C ale unui triunghiu, ca centre, se descriu trei cercuri tangente între ele două câte două.

Fie MN, PQ, RS tangentele comune exterioare cercurilor (B, C), (C, A) și (A, B). Fie încă O_a centrul cercului tangent cercurilor B, C și dreptei M N; O_b centrul cercului tangent cercurilor C, A și dreptei P Q; O_c centrul cercului tangent cercurilor A, B și dreptei R S. Să se demonstreze că avem relațiunile:

$$\rho_b\rho'_c\rho''_a=\rho_c\rho'_a\rho''_b$$

și:

$$\frac{\rho\rho}{r_a}=\frac{\rho'\rho'_1}{r_b}=\frac{\rho''\rho''}{r_c}$$

în care r_i sunt razele cercurilor exînscrise triunghiului A B C; ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c sunt razele cercurilor tritangente triunghiului B C O_a, ρ', ρ'_a, ρ'_b, ρ'_c sunt razele cercurilor tritangente triunghiului C A O_b; iar ρ'', ρ''_a, ρ''_b, ρ''_c sunt razele cercurilor tritangente triunghiului A B O_c.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

407. — Se dau în plan 4 drepte oarecare. Se cere să se construiască un romb care are câte un vârf pe câte una din cele 4 drepte.

ION PROTOPOPESCU

408. — Ecuația: $x^2-px+q=0$

admite ca rădăcini pe $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}\beta$.

Să se formeze ecuația, care admite ca rădăcini pe, $\sin\alpha$ și $\sin\beta$.

EMIL ȘTEFANESCU

409. — Să se găsească limita expresiunii:

$$\left[\left(\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{1+s^2-2s}\right)^{\frac{s(1-s^2)}{s\sin\alpha}}-1\right]\cdot\frac{1}{\sin\alpha},$$

pentru $\alpha=0$.

V. VALCOVICI

410. — Să se demonstreze că oricare ar fi triunghiul A B C, expresiunea:

$$E=\frac{r}{p}\left[\frac{r_a r_b(a+b)}{ab(h_a+h_b)}+\frac{r_b r_c(b+c)}{bc(h_b+h_c)}+\frac{r_c r_a(c+a)}{ca(h_c+h_a)}\right]$$

păstrează o valoare constantă.

CIORANESCU I. C-TIN

411. — O roată dințată de diametru D_1, este în contact cu o alta de diametru D_2, astfel ca $D_2=2D_1$. Iuțelile lor unghiulare sunt ω_1 și ω_2.

Dacă frânăm roata întâia cu un moment de frecare M aplicat pe axa ei, să se determine câte rotații mai face sistemul până se oprește, dacă știm că roata primă singură s'ar fi oprit după N_1 rotații.

C. TEODORESCU

INFORMATIUNI

In editura „Cultura Națională“ București, a apărut cartea d-lui profesor *Traian Lalescu*, *„Calculul Algebric“*. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la *„Cartea Românească“*, București; prețul 80 lei.

In biblioteca „Gazetei Matematice“ a reapărut cartea d-lui profesor *Niculae Abramescu*, „Lecțiuni de Algebră Superioară, Teoria ecuațiilor“. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la „Gazeta Matematică“, Fabrica de chibrituri, Filaret, București, prețul 80 lei.

Concursul Revistei Matematice din Timișoara a întrunit până acum pe următorii corespondenți înscriși. In dreptul fiecăruia s'a trecut numărul problemelor rezolvate în numerile 1, 2, 3, 4 ale revistei și numărul de puncte întrunite.

1. Berdan I. C., 270, 286, 288, 292, 222, 237, 251, 282, 274, 247, 268, 287, 311, *13 puncte.*
2. Botea Gh. Nic., 270, 286, 251, 274, 330, 332, 268, 287, 308, 309, 312, 355, *12 puncte*
3. Braester Otto, 281, 251, 309, *3 puncte.*
4. Căldăraru Leon, 330, 332 308, *3 puncte.*
5. Cormanschi I., 330, 332, *2 puncte*
6. Costăchescu I. I.
7. Frătici Ion, 308, 312, *2 puncte.*
8. Gabrielescu V. 238, 282, 274, *3 puncte.*
9. Gârleșteanu M., 270, 249, 309, 311, *4 puncte.*
10. Manafu Valeriu, 281, 332, 268, 288, *4 puncte.*
11. Milner I., 330, 332, 358, *3 puncte.*
12. Neumann Maria
13. Petrescu N. D-tru.
14. Podariu Alex.
15. Podeanu P. Aurel.
16. Popovici C. C-tin.
17. Roșu Alex.
18. Șerban I. Tib., 222, 274, 332, 247, 311, *5 puncte.*
19. Spârchez Zeno., 252, 332, *2 puncte*
20. Ștefănescu Emil, 270, 281, 292, 252, 274, 247, 268, 287, 308, 309, 311, 312, *12 puncte.*
21. Tărăbuță, C. Paul, 270, 286, 288, 281, 292, 222, 237, 251, 252, 274, 247, 268, 308, 309, 311, *15 puncte.*
22. Vladea Ion.

Candidații sunt rugați să-și completeze soluțiile problemelor de concurs și a celor publicate în numerele 6, 7, 8, 9, înaintându-le în termen, adică până la 15 Ianuarie 1925.

D-l Profesor *Traian Lalescu*, a donat pentru Revista Matematică din Timișoara suma de lei 2000. Sprijinul material și moral pe care d-l Tr. Lalescu îl acordă revistei noastre este neprețuit, și arată marea sa dragoste pentru revista noastră, pe care a întemeiat-o acum patru ani când a venit să deschidă Școala Politechnică din Timișoara, Mulțumirile noastre în numele tuturor prietenilor și corespondenților noștri, nu sunt de cât o mică parte din ceiace cu toții purtăm în inimile noastre.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ȘASEZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 IANUARIE 1925 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. N. ABRAMESCU. ASUPRA DISCUTIUNEI RADACINELOR UNEI ECUATII DE GRADUL AL DOILEA.
2. NOTE MATEMATICE, 18.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 350, 362, 363, 364, 371.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA DISCUȚIUNEI RADACINELOR UNEI ECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA

de N. ABRAMESCU

Printre interesantele chestiuni referitoare la discuția rădăcinelor unei ecuații de gradul al doilea, sunt și acelea care se obțin punând rădăcinelor ecuației condiții de mărime față de anumite cantități date. Așa, de exemplu, am putea să ne întrebăm în ce împrejurări rădăcinele unei ecuații de gradul al doilea sunt: 1° ambele mai mici decât o cantitate dată; 2° una mai mică și alta mai mare decât o cantitate dată; 3° ambele mai mari decât o cantitate; 4° o rădăcină mai mică decât o cantitate a, iar cealaltă mai mare decât o cantitate $b\,(a<b)$; 5° ambele rădăcini cuprinse între două cantități date; 6° ambele rădăcini mai mici decât o cantitate b, iar o cantitate $a\,(a<b)$ să fie cuprinsă între rădăcinele ecuației.

Vom însemna, ca de obicei, cu x' și x'' rădăcinele ecuației de gradul al doilea:

$$(1)\qquad f(x)=Ax^2+Bx+C=0,$$

care poate fi pusă sub forma:

$$(2)\qquad f(x)=A(x-x')(x-x'').$$

1°. *Ambele rădăcini mai mici decât o cantitate dată a.* Să formăm ecuația de gradul al doilea $\varphi(y)=0$, ale cărei rădăcini y' și y'' se obțin din ale ecuații date cu transformarea:

$$(3)\qquad y=x-a.$$

Această ecuație se obține înlocuind în ecuația (1) pe x cu $(y+a)$,

$$\varphi(y)=f(y+a)=A(y+a)^2+B(y+a)+C$$

$$(4)\qquad \varphi(y)=Ay^2+y(2Aa+B)+Aa^2+Ba+C=0.$$

Realizantul acestei ecuații este:

$$(2Aa+B)^2-4A(Aa^2+Ba+C)=B^2-4AC,$$

adică tocmai realizantul ecuații $f(x)=0$, ceeace însemnează că ecuațiile $f(x)=0$ și $\varphi(y)=0$ au în acelaș timp rădăcini reale. Așa și trebuia, căci rădăcinele ecuații $\varphi(y)=0$ sunt:

$$(5)\qquad y'=x'-a,\quad y''=x''-a,$$

și se vede că y' și y'' sunt în același timp reale cu x' și x''.

Dar, dacă rădăcinele ecuației $f(x)=0$ sunt mai mici decât a, se vede, din relațiile (5), că atunci y' și y'' sunt amândouă negative.

Deci, în loc de a scrie că rădăcinele ecuației (1) sunt mai mici decât a, este tot una a scrie că rădăcinele ecuației transformate (4) sunt ambele negative. Aceasta știm să exprimăm și anume scriind că produsul rădăcinelor ecuației (4) să fie pozitiv, iar suma rădăcinelor negativă, adică:

$$(6)\qquad \frac{Aa^2+Ba+C}{A}>0,\quad -\frac{2Aa+B}{A}<0.$$

Exemplu. In ce caz rădăcinele ecuației:

$$(7)\qquad f(x)=(m^2-1)x^2-(2m+1)x+1=0$$

snnt mai mici decât 1.

Realizantul ecuației este:

$$(2m+1)^2-4(m^2-1)=4m+5;$$

acesta este pozitiv pentru $m>-\frac{5}{4}$, și negativ pentru $m<-\frac{5}{4}$.

Făcând în ecuația (7) substituția (3), $y = x - 1$, condițiile (6) sunt în acest caz:

$$\left[a = 1,\ A = m^2 - 1,\ B = -(2m+1),\ C = 1\right],$$

$$\frac{(m^2-1).1^2 - (2m+1).1 + 1}{m^2-1} > 0,$$

$$-\frac{2(m^2-1).1 - (2m+1)}{m^2-1} < 0,$$

sau:

$$E = \frac{m^2 - 2m - 1}{m^2 - 1} > 0,\quad E' = \frac{2m^2 - 2m - 3}{m^2 - 1} > 0.$$

Expresiunile E și E′ își schimbă semnele pentru rădăcinele ecuațiilor:

$m^2 - 2m - 1 = 0$, $2m^2 - 2m - 3 = 0$, $m^2 - 1 = 0$,

care sunt respectiv:

$$m = 1 \pm \sqrt{2},\quad m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2},\quad m = \pm 1.$$

Rezultatul îl avem imediat din tabloul următor:

m	$4m+5$	m^2-2m-1	m^2-1	$2m^2-2m-3$	E	E′
$-\infty$	−	+	+	+	+	+
$-\frac{5}{4}$	0					
	+	+	+	+	+	+
-1			0			
	+	+	−	+	−	−
$\frac{1-\sqrt{7}}{2}$				0		
	+	+	−	−	−	+
$1-\sqrt{2}$		0				
	+	−	−	−	+	+
1			0			
	+	−	+	−	−	−
$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$				0		
	+	−	+	+	−	+
$1+\sqrt{2}$		0				
	+	+	+	+	+	+
∞						

Vedem că $4m + 5 > 0$, $E > 0$, $E' > 0$, pentru valorile lui m

$$\frac{5}{4} < m < 1,\quad 1 - \sqrt{2} < m < 1,\quad m > 1 + \sqrt{2}.$$

Acestea sunt valorile lui m pentru care rădăcinele ecuații (7) date sunt mai mici decât 1.

2°- *O rădăcină mai mică și alta mai mare de cât o cantitate dată.*

Presupunând că a este cantitatea dată, să facem în ecuația (1) transformarea (3); o rădăcină x' a ecuații $f(x) = 0$ fiind mai mică de cât a, și alta x'' mai mare de cât a, rezultă că rădăcinele $y' = x' - a$, $y'' = x'' - a$ ale ecuații (4) transformate, sunt una pozitivă și alta negativă, deci produsul rădăcinelor acestei ecuații trebue să fie negativ,

$$\frac{A a^2 + B a + C}{A} < 0.$$

Inmulțind cu A ambii termeni și observând că A^2 fiind patrat, este pozitiv, urmează:

$$A(A a^2 + B a + C) < 0, \tag{8}$$

care este condiția ca numărul a să fie cuprins între rădăcinele ecuații (1).

Exemplu. Să se determine valorile lui m pentru care numărul 2 să fie cuprins între rădăcinele ecuații:

$$(m-1)x^2 - 2mx + m^2 = 0.$$

Realizantul acestei ecuații este:

$$m^2 - m^2(m-1) < -m^2 . m.$$

Semnul său depinde de $-m$. In cazul nostru $a = 2$, deci relația de condiție (8) devine:

$$(m-1)\left[(m-1)2^2 - 2m . 2 + m^2\right] < 0,$$

sau:

$$E = (m-1)(m^2 - 4) < 0.$$

Rezultatul îl avem din tabloul.

m	Realizant, $-m$	$m-1$	m^2-4	E
$-\infty$				
	+	−	+	−
-2			0	
	+	−	−	+
0	0			
	−	−	−	+
1		0		
	−	+	−	−
2			0	
	−	+	+	+
∞				

Trebuind să avem realizantul pozitiv, și $E<0$, m trebue să îndeplinească condiția

$$m<-2.$$

3°. *Ambele rădăcini mai mari decât o cantitate dată* a. Făcând transformarea $y=x-a$, în ecuația (1), urmează că rădăcinele y' și y'' ale ecuații transformate, (4),

$$y'=x'-a,\quad y''=x''-a,$$

sunt ambele pozitive; deci, produsul rădăcinelor ecuații (4) să fie pozitiv și suma lor pozitiv, adică:

$$(9)\qquad \frac{A a^2+B a+C}{A}>0,\quad -\frac{2Aa+B}{A}>0,$$

care sunt condițiile ca rădăcinele ecuații (1) să fie mai mari de cât a.

Exemplu. Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinele ecuații:

$$(m-2)x^2-(m-4)x+m-3=0,$$

să fie mai mari de cât 1.

Realizantul acestei ecuații este:

$$(m-4)^2-4(m-2)(m-3)=-(3m^2-12m+8).$$

Rădăcinele realizantului sunt $\frac{6\pm\sqrt{12}}{3}$.

In cazul considerat $a=1$, astfel că neegalitățile (9) sunt:

$$\frac{(m-2)1^2-(m-4)1+m-3}{m-2}>0,$$

$$-\frac{2(m-2)1-(m-4)}{m-2}>0,$$

sau:

$$\frac{m-1}{m-2}>0,\quad \frac{m}{m-2}<0,$$

sau:

$$E=(m-1)(m-2)>0,\quad E'=m(m-2)<0.$$

Rezultatul îl avem din tabloul:

m	$-(3m^2-12m+8)$	E	E'
$-\infty$			
	−	+	+
0			0
	−	+	−
$\frac{6-\sqrt{12}}{3}$	0		
	+	+	−
1		0	
	+	−	−
2		0	0
	+	+	+
$\frac{6+\sqrt{12}}{3}$	0		
	−	+	+
∞			

Trebuind să avem realizantul pozitiv, $E>0$, $E'<0$, urmează că $\frac{6-\sqrt{12}}{3}<m<1$.

4°. *O rădăcină mai mică de cât o cantitate a și alta mai mare de cât o cantitate* b $(a<b)$.

Aceasta însemnează că a și b sunt cuprinse între rădăcinele ecuații (1).

Insă, am văzut în cazul 2°, că pentru ca numerile a și b, să fie cuprinse între rădăcini trebue să avem condițiile:

$$(10)\quad A(Aa^2+Ba+C)<0,\quad A(Ab^2+Bb+C)<0.$$

Exemplu. Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinele ecuației:

$$(2-m)x^2-2mx+m^2-3m=0.$$

Să fie una mai mică de cât 1 și alta mai mare ca 2.

Realizantul ecuației este:

$$m^2-(2-m)(m^2-3m)=m(m^2-4m+6);$$

$m^2-4m+6=0$ având rădăcini imaginare, este o sumă de patrate, are semnul primului termen, plus, deci semnul realizantului depinde de m.

Neegalitățile (10) devin în cazul nostru $a=1$, $b=2$,

$$E=(2-m)(m^2-6m+2)<0,$$

$$E'=(2-m)(m^2-11m+8)<0.$$

Rădăcinele ecuațiilor $m^2 - 6m + 2 = 0$, $m^2 - 11m + 8 = 0$ sunt respectiv:

$$m = 3 \pm \sqrt{7}, \quad m = \frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}.$$

Rezultatul îl avem din tabloul:

m	Realizant m	$2 - m$	$m^2 - 6m + 2$	$m^2 - 11m + 8$	E	E′
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
0	0					
	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3-\sqrt{7}$			0			
	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\frac{11-\sqrt{89}}{2}$				0		
	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
2		0				
	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$3+\sqrt{7}$			0			
	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{11+\sqrt{89}}{2}$				0		
∞	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

De oarece trebue să avem realizantul pozitiv și $E < 0$, $E' < 0$, urmează că:

$$\frac{11 - \sqrt{89}}{2} < m < 2, \qquad m > \frac{11 + \sqrt{89}}{2}.$$

5°. *Ambele rădăcini să fie cuprinse între două cantități date a și b.*

Pentru a găsi condițiile, să facem transformarea

$$y = \frac{x - a}{x - b}.$$

De unde:

$$x = \frac{by - a}{y - 1},$$

și înlocuind în ecuația (1), avem:

$$A\left(\frac{by - a}{y - 1}\right)^2 + B\frac{by - a}{y - 1} + C = 0,$$

sau:

$$(11) \qquad F(y) = y^2(Ab^2 + Bb + C)$$
$$- y(2Aab + Ba + Bb + 2C) + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Să observăm că realizantul ecuației (11) este:

$$R = (2Aab + Ba + Bb + 2C)^2$$
$$- 4(Ab^2 + Bb + C)(Aa^2 + Ba + C),$$

$$R = (B^2 - 4AC)(a - b)^2.$$

Deci ecuația transformată, (11), are rădăcini reale în acelaș timp ca ecuația (1). Așa și trebuia, de oarece transformarea

$$y = \frac{x - a}{x - b}$$

arată că x și y sunt în acelaș timp cantități reale sau imaginare.

Dacă x' și x'' sunt cuprinse între a și b, atunci rădăcinele:

$$y' = \frac{x' - a}{x' - b}, \quad y'' = \frac{x'' - a}{x'' - b}$$

sunt ambele negative. Deci, în loc de a scrie că x' și x'' sunt cuprinse între a și b, vom scrie că ecuația (11) are rădăcinele negative, adică produsul pozitiv și suma negativă,

$$(12) \quad \frac{Aa^2 + Ba + C}{Ab^2 + Bb + C} > 0, \quad \frac{2Aab + Ba + Bb + 2C}{Ab^2 + Bb + C} < 0.$$

Exemplu. Să se discute ecuația:

$$2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + m = 0.$$

Rădăcinele fiind sinusul unui unghiu, trebue să fie cuprinse între -1 și $+1$. Făcând transformarea:

$$y = \frac{\sin\alpha - 1}{\sin\alpha + 1}, \quad \sin\alpha = \frac{1 + y}{1 - y},$$

ecuația dată devine:

$$2\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)^2 - 3\frac{1 + y}{1 - y} + m = 0,$$

$$F(y) = y^2(m + 5) + 2y(2 - m) + m - 1 = 0.$$

La o rădăcină negativă a acestei ecuații corespunde o valoare pentru $\sin\alpha$ cuprinsă între -1 și $+1$, iar la o rădăcină positivă a ecuații $F(y) = 0$, nu corespunde o valoare acceptabilă pentru $\sin\alpha$.

Realizantul este $9 - 8m$.

Produsul şi suma rădăcinelor ecuaţii $F(y)=0$ sunt:

$$P=\frac{m-1}{m+5},\quad S=\frac{m-2}{m+5}$$

Discuţia se vede imediat din tabloul:

m	Realizantul	Produsul P	Suma S	Rădăcinele y	Rădăcinele $\sin\alpha$
$-\infty$	+	+	+	Reale ambele pozitive	Nu există valori pentru $\sin\alpha$
-5	+	−	−	Reale, una pozitivă, alta negativă	Una acceptabilă
1	+	+	−	Reale, ambele negative	Două acceptabile
$\frac{0}{0}$	0				
2	−	−	−	Imaginare	Nici una
∞	−	+	+	Imaginare	Nici una

6. *Ambele rădăcini mai mici decât o cantitate b, iar o cantitate, a $(a<b)$ să fie cuprinsă între rădăcinele ecuaţiei.* Dar condiţiile ca ambele rădăcini x' şi x'' mai mici decât b, sunt [§ 1⁰ neegalităţile (6)]:

$$(12)\qquad \frac{Ab^2+Bb+C}{A}>0,\quad -\frac{2Ab+B}{A}<0.$$

Am văzut de asemenea că, pentru ca a să fie cuprins între rădăcini, trebue să avem [§ 2⁰, neegalitatea (8)].

$$(13)\qquad A(Aa^2+Ba+C)<0.$$

Condiţiile cerute sunt exprimate de neegalităţile (12) şi (13).

Exemplu. Cum trebue să fie m pentru ca rădăcinele ecuaţiei:

$$(m-1)x^2+(m-2)x+m-3=0$$

să fie mai mici decât 2, iar 1 să fie cuprins între rădăcini.

In cazul considerat avem:

$$a=1,\ b=2,\ A=m-1,\ B=m-2,\ C=m-3.$$

Condiţiile (12) şi (13) sunt:

$$E=(m-1)(7m-11)>0,\quad E'=(m-1)(5m-7)>0,$$
$$E''=(m-1)(3m-6)<0.$$

Realizantul ecuaţiei date este $R=-(3m^2-12m+8)$, iar rădăcinele ecuaţiei $R=0$ sunt:

$$\frac{6+\sqrt{12}}{3}.$$

Rezultatul îl avem din tabloul:

m	R	E	E′	E″
$-\infty$	−	+	+	+
$\frac{6-\sqrt{12}}{3}$	0			
	+	+	+	+
1		0	0	0
	+	−	−	−
$\frac{7}{5}$			0	
	+	−	+	−
$\frac{11}{7}$		0		
	+	+	+	−
2				0
	+	+	+	+
$\frac{6+\sqrt{12}}{3}$	0			
	−	+	+	+
∞				

Trebuind să avem în acelaş timp $R>0$, $E>0$, $E'<0$, $E''<0$, rezultă că nu există valori pentru m.

NOTE MATEMATICE

18. *Insumări de forma:* $\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} f(k)$.

Dacă putem determina o funcţiune $\varphi(k)$, astfel ca:

$$(1)\qquad \varphi(k)-a\varphi(k-1)\equiv f(k),$$

atunci însumarea dată se efectuează imediat, fiind uşor de observat că:

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} f(k)=\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\left[\varphi(k)-a\varphi(k-1)\right]$$
$$=\varphi(n)-a^n\varphi(0).$$

Dacă luăm de exemplu, $f(k) = k$, atunci (1) devine:

$$\varphi(k) - a\varphi(k-1) \equiv k. \tag{3}$$

Pentru a satisface această identitate vom lua $\varphi(k)$ de forma:

$$\varphi(k) = Ak + B,$$

atunci (3) devine:

$$A(1-a)k + B(1-a) + aA \equiv k$$

de unde deducem:

$$A(1-a) = 1,\ B(1-a) + aA = 0$$

$$A = \frac{1}{1-a},\ B = -\frac{aA}{1-a} = -\frac{a}{(1-a)^2}$$

Deci:

$$\varphi(k) = \frac{1}{1-a}k - \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Insumarea (2), devine deci:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}.k = \frac{n}{1-a} - \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{a^{n+1}}{(1-a)^2} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(1-a)^2}.$$

Dacă presupunem că $f(k)$ este un polinom de gradul p:

$$f(k) = A_0 k^p + A_1 k^{p-1} + \ldots + A_r k^{p-r} + \ldots + A_p$$

atunci vom lua pentru $\varphi(k)$:

$$\varphi(k) \equiv B_0 k^p + B_1 k^{p-1} + \ldots + B_r k^{p-r} + \ldots + B_p$$

unde $B_0, B_1, \ldots B_p$ îi determinăm astfel ca relația (1) să fie satisfăcută, adică:

$$B_0 k^p + B_1 k^{p-1} + \ldots + B_r k^{p-r} + \ldots + B_p - aB_0(k-1)^p - aB_1(k-1)^{p-1} - \ldots - aB_r(k-1)^{p-r} - \ldots - aB_p \equiv A_0 k^p + A_1 k^{p-1} + \ldots + A_r k^{p-r} + \ldots + A_p$$

$$B_0 = \frac{A_0}{1-a},\ B_1 = \frac{A_1}{1 + p\,a\,B_0 - a\,B_1},\ \ldots$$

$$B_r = \frac{A_r}{1 - (-1)^r C_p^r\, a\, B_0 - \ldots - a\,B_r} \tag{4}$$

$$B_p = \frac{A_p}{1 - (-1)^p B_0\, a - \ldots - a\,B_p}$$

In acest caz însumarea (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}(A_0 k^p + A_1 k^{p-1} + \ldots + A_p) = B_0 n^p + B_1 n^{p-1} + \ldots + B_p - a^n B_p, \tag{5}$$

unde $B_0, B_1, \ldots B_p$ au valorile date de (4).

BERDAN C.
(student, Şc. Polit. Bucureşti)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 4, Decembrie 1924. Cursuri de matematică în Paris, în anul şcolar 1923—1924, de *P. Sergescu*.

Asupra unei teoreme a lui *Pappus* de *G. I. Dumitrescu*.

2. *Foaia Matematică*, anul I, No. 12, Decembrie 1924. O corespondenţă remarcabilă, de *Micu Grünbaum*.

3. *Exerciţii de Mecanică de Ernest Abason*, asistent la Universitatea şi Şc. Politechnică din Bucureşti.

Este o culegere interesantă de probleme de mecanică, ce răspunde unei necesităţi simţite. Fiecare capitol de probleme este precedat de un rezumat al cunoştinţelor teoretice şi de unele probleme complect rezolvate. Problemele ce cuprinde sunt cu îngrijire alese, însoţite de figuri clare, cu foarte mare îngrijire desenate, şi cu drept cuvânt putem spune că *„Exerciţiile de Mecanică“* a d-lui Inginer *Abason* sunt de un real folos oricărui elev de liceu, oricărui student al şcoalei Politechnice şi oricărei persoane care are cunoştinţe generale de mecanică. A apărut în Ediţia „Culturei Naţionale“. Se găseşte la librăria *„Cartea Românească“ Bucureşti*, sau la Autor, Inginer E. Abason, str. *Justinian* 18, *Bucureşti*. Costul 100 lei.

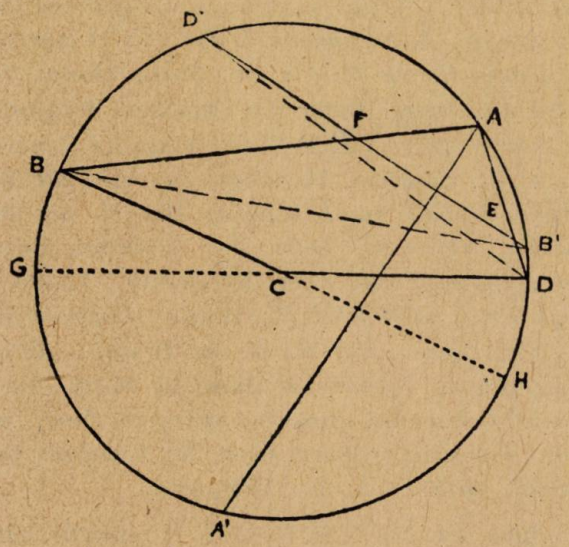
PROBLEME REZOLVATE

350. — *Se dă cercul* C *şi patrulaterul* ABCD *cu vârfurile* A, B, D *pe cerc. Să se demonstreze că bisectoarea* AA′ *a unghiului* A *este perpendiculară pe dreapta* B′D′ *ce uneşte intersecţiile cercului cu bisectoarele unghiurile* B *şi* D.

P. TROFINOV

Soluţie dată de d-nii: *Beju Traian* (lic. Arad), *Al. Comănescu-Bălteni*, *Georgescu Jean* (lic. M-rea

Dealu, *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu) şi *Tărăbută Paul* (lic, Mihai-Viteazul, Bucureşti).



Construind figura în condiţiile problemei şi privind notaţiile din figură, observăm că:

$\overset{\frown}{AD'} = \overset{\frown}{D'G}$, $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{B'H}$, fiindcă DD' şi BB' sunt respectiv bisectoarele unghiurilor D şi B a patrulaterului.

Putem scri încă evident:

(1) $\overset{\frown}{AD'} + \overset{\frown}{DB'} = \overset{\frown}{D'G} + \overset{\frown}{DB'} = \overset{\frown}{D'B} + \overset{\frown}{BG} + \overset{\frown}{DB'}$

(2) $\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{BD'} = \overset{\frown}{B'H} + \overset{\frown}{BD'} = \overset{\frown}{DB'} + \overset{\frown}{DH} + \overset{\frown}{D'B}$

Cum, $\overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{DH}$ fiindcă se opun la unghiuri la centru egale, rezultă că ultimii membri din relaţiile (1) şi (2) sunt egali şi urmează că:

(3) $$\overset{\frown}{AD'} + \overset{\frown}{DB'} = \overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{BD'}$$

Dar:

$$\text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{AD'} + \overset{\frown}{DB'}}{2} = \text{măs.}\ \overset{\frown}{AEF}$$

$$\text{măs.}\ \frac{\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{BD'}}{2} = \text{măs.}\ \overset{\frown}{AFE}$$

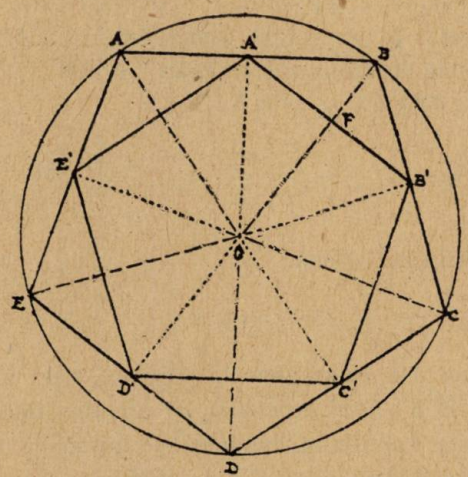
In virtutea egalităţei (3), primii membri ai acestor relaţii sunt egali, rezultă atunci, că:

$$\overset{\frown}{AEF} = \overset{\frown}{AFE}.$$

Prin urmare triunghiul AEF este isoscel şi atunci bisectoarea unghiului A ştim că este perpendiculară pe bază, adică pe EF sau $B'D'$, ceiace era de dovedit.

362. — *Se dă un pentagon regulat* ABCDE *înscris într'un cerc. Se unesc mijloacele laturilor lui şi se obţine pentagonul* $A'B'C'D'E'$. *Să se demonstreze că produsul perimetrului pentagonului mic, prin raza cercului circumscris pentagonului celui mare, este egal cu produsul perimetrului pentagonului mare prin raza cercului circumscris pentagonului mic.*

FLORESCU OPREA



Prima soluţie dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Critz D. Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Ionescu Lazăr, Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lateş I. Vasile* (Sem. Ped. Iaşi), *Maior Manoil Eugeniu* (Şc. Sp. de Artilerie), *Muşta Şt.* (Cluj), *Porumbaru I. Ioan, Roşu Al.* (lic. M-rea Dealu). *Silistrarianu C.* (Ploeşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vlădeanu Tiberiu* (lic. M-rea Dealu).

Fie $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ pentagoanele date și P, R; p, r respectiv perimetrele și razele lor. Considerăm triunghiul dreptunghic $OB'B$, și scrim dublul ariei lui în două moduri, anume:

$$BB'.OB' = OB.B'F. \quad (1)$$

Multiplicând cu 10 această egalitate și observând că:

$$10BB' = P,\ OB' = r,\ 10B'F = p,\ OB' = R,$$

rezultă:

$$P.r = p.R,$$

ceiace era de dovedit.

Observare. Problema e adevărată pentru orice poligon de n laturi. Relația (1) se înmulțește în cazul general cu $2n$.

Soluția 2-a dată de d-nii: *Adam Eugen* (lic. Timișoara), *Beju Tralan* (lic. Arad), *Dugan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Lindenberg Lyonel* (București), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu) și *Vasiliu Thomas* (lic. Internat, Iași).

Se observă că suprafața S a pentagonului mare, este egală cu suprafața pentagonului mic, plus suprafețele triunghiurilor egale $A'BB'$, $B'CC'$, $C'DD'$, $D'EE'$, și $E'AA'$, deci:

$$S = P.\frac{r}{2} = p.\frac{OF}{2} + p.\frac{R - OF}{2}.$$

Simplificând găsim:

$$P.r = p.R.$$

Soluția 3-a. Pentagoanele regulate $ABCDE$ și $A'B'C'D'E'$ fiind asemenea, în virtutea unei teoreme bine cunoscute, raportul perimetrelor lor e egal cu raportul razelor lor, adică:

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$$

$$\therefore\ P.r = p.R.$$

Soluție dată de d-nii: *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Bernardis N. Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Brodsky I.* (lic. Cetatea-Albă), *Constantinescu Teodor* (lic. Ploești), *Curcubată D.* (lic. Brașov), *Cocorandu Dan* (lic. Brașov), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. București), *Gheorghiu C. Adrian* (lic. Pitești), *Grofșorean Gh.* (lic. Lugoj), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu V. D-tru* (lic. R.-Sărat), *C-tin Th. Ionescu Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Manoil Adolf* (Roman), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Petrescu Al. Dan* (lic. militar, Craiova), *Popa Petrescu Nicolae* (lic. Brașov), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Purdilă C.* (lic. Brașov), *Rătan I.* (lic. Brașov), *Șerbănescu Mihail* (lic. M-rea Dealu) *Staicu Irimie* (lic. Brașov), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit. Timișoara), *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, București), *Vasiliu Gh.* (lic. Timișoara).

Soluția 4-a. Fie L, R, P; l, p, r respectiv laturile, razele și perimetrele celor două pentagoane regulate $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$. Folosind expresia laturei unui pentagon regulat în funcție de rază, avem:

$$L = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\quad l = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

atunci rezultă, că:

$$P.r = \frac{5Rr}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\ p.R = \frac{5r.R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\therefore\ P.r = p.R.$$

Soluție dată de d-nii: *Agapescu M. Niculai* (Sem. Pedag. Iași), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Botez Mihail*, *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Comănescu Al.-Bălteni*, *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frătici Ioan* (lic. Brașov), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Grigore T. V.* *Gheorghiu Victor* (lic. Tg.-Jiu), *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit. Timișoara), *Iliovici Gh. C-tin* (lic. Ploești), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu I. Paul*, *Maior Manoil Euganiu* (Șc. Sup. de Artilerie), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milner I.* (Edinți), *Pascu Wilhelm* (Cernăuți), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Pop Iulian* (Cluj), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popo-*

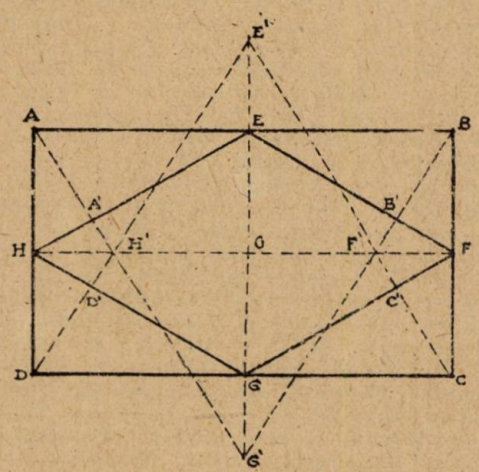
vici Th. Ioan (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Zărneşti), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Vlădea I.* (lic. Braşov) şi *Zarda Ion* (lic. Tg.-Jiu).

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Constantinescu C. Marin* (lic. Slatina), *Grigore Nicolae* (lic. Turda), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Segărceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti).

Observare. Cei mai mulţi dintre rezolvitori au observat că enunţul este adevărat, nu pentru un pentagon regulat, dar pentru orice poligon regulat, cum s'a arătat în prima soluţie.

363. — *Unind mijloacele laturilor unui dreptunghiu se formează un paralelogram. Perpendicularele duse din vârfurile dreptunghiului pe laturile paralelogramului se întâlnesc pe dreptele ce unesc mijloacele laturilor dreptunghiului.*

WEISS SOLOMON



Să dovedim că perpendiculara AA' pe HE, întâlneşte perpendiculara BB' pe EF, într'un punct pe diagonala EG. Pentru aceasta observăm că triunghiurile dreptunghice AHE şi BEF sunt egale ca având catetele egale, rezultă că $\sphericalangle AEA' = \sphericalangle BEB'$. Triunghiurile dreptunghice $A'AE$ şi $B'BE$ sunt egale având ipotenuzele egale $AE = EB$ şi câte un unghiu ascuţit egal, $\sphericalangle AEA' = \sphericalangle BEB'$ urmează că şi $\sphericalangle A'AE = \sphericalangle B'BE$, că prin urmare triunghiul $AG'B$ este isoscel. Dreapta EG fiind perpendiculară pe mijlocul lui AB, prelungită va trece prin vârful G' a triunghiului $AG'B$, deci AA' şi BB' se întâlnesc pe EG.

Să arătăm că AA' şi DD' perpendiculare respectiv pe HE şi HG se întâlnesc pe HF. Pentru aceasta observăm că triunghiurile dreptunghice $A'AH$ şi $D'HD$ au ipotenuzele egale $AH = DH$ şi $\sphericalangle AHA' = \sphericalangle DHD'$, deci sunt egale şi deci şi $\sphericalangle HAA' = \sphericalangle HDD'$. Urmează ca triunghiul $AH'D$ este isoscel şi EF perpendiculară pe AD, trece prin H' sau că AA' şi DD' se întâlnesc pe HF.

Tot aşa dovedim că şi celelalte perpendiculare duse prin vârfurile dreptunghiului $ABCD$ pe laturile paralelogramului $EFGH$ se întâlnesc pe dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse ale dreptunghiului. In figură, se mai pot duce din A şi C perpendiculare pe EF şi din B şi D perpendiculare pe EH.

Soluţiuni bune date de d-nii: *Apoşteanu Vasile* [lic. Timişoara], *Beldie D-tru* [lic. R.-Sărat], *Beju Traian* [lic. Arad], *Beşchea Nicolae* [lic. Braşov], *Botea N.* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Botez St. Mihail*, *Braeşter Otto* [lic. Naţional. Iaşi], *Căldăraru Leon* [Bucureşti], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Chinie Mihail* [lic. Piteşti], *Comănescu Al.-Bălteni*, *Constantinescu D. D-tru* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Curcubată Dionisie* [lic. Braşov], *Diaconu B. Marin* [lic. M-rea Dealu], *Dimitriu Paul* [lic. M-rea Dealu], *Drăgan G.* [lic. Braşov], *Dugan C. Victor* [lic. M-rea Dealu], *Frătici Ioan* [Şc. Polit. Timişoara], *Gataianţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Gârleşteanu Mihail* [Şc. Polit. Timişoara], *Georgescu Jean* [lic. M-rea Dealu], *Ghelber Mauriciu* [sem. Ped. Bucureşti], *Grigore T. Ioan* [Tg.-Jiu], *Grofşoreanu I. L. Gheorghe* [lic. Lugoj], *Grubenmann I. Gr.* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Iliescu Mircea* [lic. M-rea Dealu], *Iliovici Gh. C-tin* [lic. Ploeşti], *Ieremia Petru* [lic. Timişoara], *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Angelo* [lic, Cluj], *C-tin Th. Ionescu Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu T. Carol* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ianescu I. Paul* [Amăreştii de Jos], *Jojea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Lindemberg Lyonel* [Bucureşti], *Marini Paul* [student, Cluj], *Marius Mariş* [lic. Arad], *Mihăilescu St. Niculae* [lic. Matei Basarab, Bucureşti], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Muşta St.* [Cluj], *Nestor D-tru*, *Novacu A. C. Valeriu* [lic. Arad], *Olariu T. Enea* [Şc. Polit. Timişoara], *Pamula Alexandru* [lic. Botoşani], *Patriciu Aurel* [lic. M-rea Dealu]. *Popescu N. Nicolai* [student, Bucureşti], *Popovici Aurel* [Focşani], *Podeanu Aurel* [lic. Piteşti], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popovici Th. Ion* [lic. Mihai-Viteazul. Bucureşti], *Porumbaru I. Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Rătan I.* [lic. Braşov], *Roşu Alex.* [lic. M-rea Dealu], *Răcăreanu Nic.* [lic. Braşov], *Scripcă Laur* [lic. Naţional, Iaşi], *Şerban Tiberiu* [lic. Zărneşti], *Şerbănescu Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Segărceanu C. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Staicu Irimie* [lic. Braşov], *Stănescu I. Aurel* [lic. M-rea Dealu], *Stoica*

Aurel [lic. Cantemir, Bucureşti], *Stroescu I. Gheorghe* [lic. Tg.-Mureş], *Ţăraş Vasile* [lic. Braşov], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Ţigoiu Ioan* [Şc. Comerţ, Constanţa], *Vasilescu Bartolomeu* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Vasiliu C. Ioan* [lic. Tg.-Mureş], *Vasiliu Gh.* [lic. Timişoara], *Vasiliu Thoma* [lic. Internat, Iaşi] şi *Vlădea Ioan* [lic. Braşov].

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Agapescu M. Nicolai* [Sem. Ped. Iaşi], *Constantinescu C. Marius* [lic. Slatina], *Gheorghiu C-tin Adrian* [lic. Piteşti] şi *Munafu Valeriu.*

Soluţie analitică dată de d-nii: *Beldie D-tru* (lic. R.-Sărat), *Marini Paul* (student Cluj), *Pasco Wilhelm* (Constanţa), şi *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi).

Luăm HF şi EG drept axe de coordonate şi fie (a, b) coordonatele punctului B. Ecuaţiile dreptelor EF şi EH sunt respectiv:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad -\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

coeficienţii lor unghiulari fiind, $-\frac{b}{a}$ şi $\frac{b}{a}$.

Ecuaţia perpendicularelor BB′ pe EF şi AA′ pe HE, sunt:

$$\begin{cases} y-b=\frac{a}{b}(x-a) \\ y-b=-\frac{a}{b}(x+a) \end{cases}$$

Să căutăm intersecţia acestor drepte. Primii membrii fiind egali, rezultă:

$$\frac{a}{b}(x-a)=-\frac{a}{b}(x+a)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=b-\frac{a^2}{b} \end{cases}$$

Deci punctul de întersecţie al dreptelo2 AA′ BB′ este pe dreapta EG. Tot astfel şi pentru celelalte puncte analoage.

364. — *Dacă* b^2-4ac *este patrat perfect, atunci şi expresiunea:*

$$(b^2-2ac-bc)^2+4c\left[b^3-ac(a+c)-3abc\right],$$

este patrat perfect.

V ALACI

Dezvoltând expresiunea dată, avem succesiv:

$$b^4+4a^2c^2+b^2c^2-4ab^2c-2b^3c+4abc^2$$
$$+4b^3c-4a^2c^2-4ac^2-12abc^2$$
$$=b^4+b^2c^2-4ab^2c+2b^3c-8abc^2-4ac^3$$
$$=b^2(b^2+2bc+c^2)-4ac(b^2+2bc+c^2)$$
$$=(b+c)^2(b^2-4ac).$$

Cum primul factor este patrat perfect, iar al doilea este şi el prin ipoteză patrat perfect, urmează că expresiunea dată este un patrat perfect.

Observare. A se vedea şi articolul „Identităţi iraţionale" R. M. T. an. IV, No. 9.

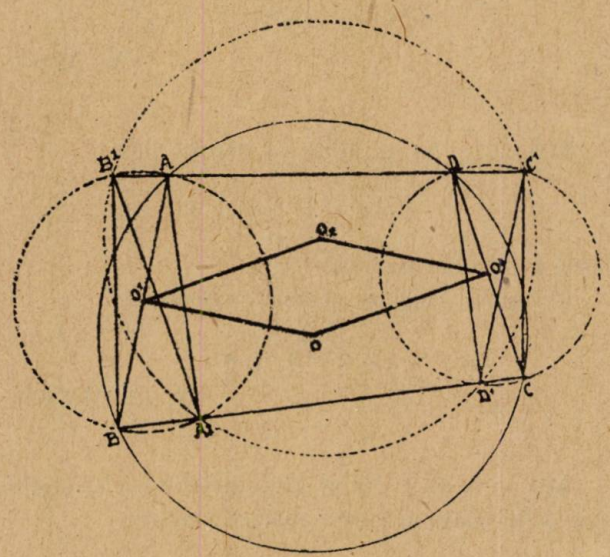
Soluţii bune date de d-nii: *Adam Eugen* [lic. Timişoara], *Agapescu M. Nicolae* [Sem. Ped. Iaşi], *Apostol Carol* [lic. M-rea Dealu], *Ardelea Radu* [Sinaia], *Băncilă Mircea* [lic. Braşov] *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Beju Traian* [lic. Arad], *Berardis N. Berardo* [lic. R.-Sărat], *Berdan C.* [Bârlad], *Beşchea Nicolae* [lic. Braşov], *Botea G Nicolae* [Bucureşti], *Braeşter Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Botez St. Mihail, Budişteanu Al.* [lic. M-rea Dealu], *Caftangioglu C. C-tin* [lic. R.-Sărat], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Chinie Mihail* [lic. Piteşti], *Comănescu Al.-Bălteni, Constantinescu D. Dimitrie* [lic Cantemir, Bucureşti], *Constantinescu Teodor* [lic Ploeşti], *Costăchescu N. Ionel* [lic. Brăila], *Critz D. M.* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Curcubată D.* [lic. Braşov], *Diaconescu V. D-tru* [lic. Caracal], *Diaconescu V. Teodor* [lic. Caracal], *Dimitrescu Mişu* [lic. Roman], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iaşi], *Drăgan G.* [lic. Braşov], *Drăghici Aurelian* [Tg.-Jiu], *Fezi E. Gh.* [lic. Orheiu], *Frătici Ioan* [lic. Braşov], *Frumuşelu Gh.* [lic. Braşov], *Gataianţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Georgescu Jean* [lic. M-rea Dealu], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Gherbanowsky Nicolae* [lic. Orheiu], *Ghinicescu I. Gh.* [lic. Internat, Iaşi], *Goldştein N.* [Cetatea-Albă], *Grigore T. Iean* [lic. T.-Jiu], *Grigore T. Virgil* [lic. Tg.-Jiu], *Gradiny I. Gheorghe* [Şc. Polit. Timişoara], *Grofşoreanu I. Gheorghe* [lic. Lugoj], *Grubenmann I. Gr.* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ianculescu Octavian* [Bocşa-Montană], *Ieremia Petru* [lic. Timişoara], *Iliescu St. Dima* [lic. Tg.-Mureş], *Iliescu Şt. Virgil* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Iliovici Gh. C-tin* [lic. Ploeşti], *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *C-tin Th. Ionescu Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu V. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Ionescu I. Paul* [Amăreştii-de-Jos], *Iscovici Paul* [lic. Piteşti], *Katz L.* [Botoşani], *Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iaşi], *Manoil Adolf* [Roman], *Marini Paul* [Cluj], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Milner I., Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Musta Şt.* [Cluj], *Nestor G. D-tru* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Nicolau G. C.* [lic. R.-Sărat], *Olariu Enea* [Şc. Polit. Timişoara], *Pop Iulian* [Cluj], *Petrescu Popa-Nicolae* [lic. Braşov], *Petrescu St. Al.-Dan* [lic. mil. Craiova], *Podeanu Aurel* lic. Piteşti], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popescu I. E.* [lic. Galaţi], *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popescu Spirea* [lic. M-rea Dealu], *Popovici Aurel* [lic. Focşani], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Popovici Chr. Jean* [lic. Galaţi], *Purdilă C-tin* [lic. Braşov], *Rauchbach Arthur, Rătan I.* [lic. Braşov], *Roşu Alex.* [lic. M-rea Dealu], *Rucăreanu Nicolae* [lic. Braşov], *Scripcă Laur* [lic. National, Iaşi],

Şerban I. Tiberiu [lic. Zărneşti], *Silistrarianu C.* [Ploeşti], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spacu Gh. Petru* [Cluj], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Staicu Iirimie* [lic. Braşov], *Stănciulescu A. George* [Piteşti], *Stănescu V.* [lic. M-rea Dealu], *Stoian I. Ilie* [lic. Braşov], *Stoica N. Aurel, Tache C. Gheorghe, Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Tăraş Vasile* [Braşov], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Vasilescu Bartolomen* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Vasiliu Gh.* [lic. Timişoara], *Vasiliu N. Şt.* [Iaşi], *Velea Gr. Mihail* [lic. Militar, Craiova], *Vlădea Ioan* [lic. Braşov] şi *Zarda Ion* [lic. Tg.-Jiu].

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Constantinescu C. Marius* [lic. Slatina], *Eleomir, Dângă G-Vlad* [lic. Orhei], *Gârleşteanu Mihail* [Şc. Polit. Timişoara], *Grabovski Eugen* [lic. Orhei], *Manaju Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Polaczek Franz* [lic Câmpulung, Bucovina], *Popa Ilie* [lic. Internat, Iaşi], *Stamatiu I. M.* [Piteşti], *Uoaşa D.* [lic. Braşov] şi *Voinescu D. Ioan* [lic. Cantemir, Bucureşti].

371. — *Se dă un patrulater inscriptibil* ABCD. *Fie* A_1, D_1 *proecţiile vârfurilor* A, D *pe dreapta* BC *şi* B_1, C_1 *proecţiile vârfurilor* B, C *pe dreapta* AD. *Să se demonstreze că: 1, patrulaterul* $A_1B_1C_1D_1$ *este inscriptibil; 2, patrulaterul format de centrele cercurilor* ABC, BB_1A_1, CC_1D *şi* $A_1B_1C_1$ *este paralelogram.*

IONESCU I. PAUL



Construim figura conform enunţului şi observăm că:

$$\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AB_1B = 90^0$$

şi

$$\sphericalangle DC_1C = \sphericalangle DD_1C = 90^0,,$$

conchidem că patrulaterele AA_1BB_1 şi CC_1DD_1 sunt inscriptibile. Urmează că:

(1) $\sphericalangle DCD_1 = \sphericalangle DC_1D_1$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle B_1A_1D_1$,

ca având respectiv aceiaşi măsură. Cum prin ipoteză patrulaterul ABCD este iscriptibil, atunci: $\sphericalangle DCD_1 + \sphericalangle DAB = 180^0$, şi din (1) rezultă că şi:

$$\sphericalangle DC_1D_1 + \sphericalangle B_1A_1D_1 = 180^0,$$

adică patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este inscriptibil, având două unghiuri opuse suplimentare.

Să demonstrăm acum că $OO_1O_2O_3$ este un paralelogram.

Observăm în primul rând că centrele O, O_1, O_2, O_3 a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BB_1A_1, $A_1B_1C_1$ şi CC_1D sunt aceleaşi ca şi a cercurilor circumscrise patrulaterelor inscriptibile ABCD, AA_1BB_1, $A_1B_1C_1D_1$ CC_1DD_1, de care am vorbit mai sus.

Acum observăm că O_1 e mijlocul lui AB, iar O se găseşte pe perpendiculara dusă pe AB în mijlocul său, deci $OO_1 \perp AB$; apoi centrele O_2 şi O_3 sunt egal depărtate de extremităţile dreptei C_1D_1, coardă comună în cercurile O_2 şi O_3, deci $O_2O_3 \perp D_1C_1$. Pe de altă parte observăm că, $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle C_1D_1C$ ca fiind egale ambele cu $\sphericalangle CDC_1$, urmează că $AB \parallel C_1D_1$, atunci şi perpendicularele pe aceste drepte sunt paralele, adică $OO_1 \parallel O_2O_3$. In mod absolut analog dovedim că şi $O_2O_1 \parallel OO_3$, conchidem deci că patrulaterul $OO_1O_2O_3$ este un paralelogram.

Soluţii date de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Brădeţeanu C. Cornel* (Craiova), *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Dorneanu Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drăghicea M.* (lic. Braşov), *Frătici I., Gârleşteanu M.* (Şc. Polit. Timişoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *C-tin Th. Ionescu Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Popescu C. C-tin* (lic. Internat Iaşi), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Roşu Alex.* (lic. M-rea Dealu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu D. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Ştefănescu Emil* (Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov) şi *Vlădea Ion* (lic. Braşov).

În ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Blasco Beatris* (Lugoj), *Braeșter Otto* (Iași), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu) *Neumann Maria* (studentă, Lugoj) și *Popovici Th. Ioan* (Șc. Polit. București).

Observări. 1. D-l *Berdan C.* (Bârlad) demonstrează problema în cazul mai general, când proecțiile de care e vorba în enunț în loc să fie ortogonale s'ar face pe un unghiu oarecare α.

2. D-l *Tărăbuță C. Paul* (București), arată că dacă proectăm vârfurile A, B pe latura CD în A_2, B_2 și vârfurile C, D pe latura AB în C_2, D_2, cercul $A_2B_2C_2D_2$ este concentric cu $A_1B_1C_1D_1$.

De asemenea A_3, C_3 fiind proecțiile vârfurilor A, C pe diagonala BD și B_3, D_3 proecțiile lui B, D pe diagonala AC, cercul $A_3B_3C_3D_3$ este și el concentric cu ABCD.

PROBLEME PROPUSE

412. — Să se găsească cel mai mic patrat perfect $\overline{a\,b}$, format din patratele perfecte a și b scrise unul după altul, știind că dacă după $\sqrt{a}$ se scrie $\sqrt{b}$ se obține tot un patrat perfect.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

413. — Un număr N scris în baza de numerație 9 are 6 cifre. Câte cifre va avea scris în baza de numerație 5.

ION PROTOPOPESCU

414. Pe două drepte fixe Δ și Δ_1 se iau punctul A pe prima și B pe a doua. Prin A și B fixe, se duc dreptele δ și δ_1 astfel că unghiurile formate de perechile de drepte (Δ, δ) și (Δ_1, δ_1) sunt egale. Se cere locul intersecției dreptelor δ și δ_1.

Fie apoi M un punct al acestui loc geometric. Să se arate că suma unghiurilor ascuțite făcute de MA cu Δ_1 și MB cu Δ este constantă.

EMIL ȘTEFANESCU

415. — Într'un cerc O se duc două diametre AB și CD. Se ia dela A spre D și dela C spre B respectiv arcele egale AM și CN. Să se arate că tangentele în punctele A, D, M, N se taie în patru puncte conciclice.

V. COSNITA.

416. — Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{(1-ma^2)(1-na)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(1-mb^2)(1-nb)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$

$$\frac{(1-mc^2)(1-nc)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(1-md^2)(1-nd)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=mn.$$

V. VALCOVICI

417. — Dacă:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},$$

să se dovedească că:

$$\frac{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_3\alpha_3)^{mq}}}}{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}}=\frac{a_1}{b_1}$$

unde:

$$\alpha_1=\sqrt[q]{a_1^p},\quad \alpha_2=\sqrt[q]{a_2^p},\quad \alpha_3=\sqrt[q]{a_3^p},$$

$$\beta_1=\sqrt[q]{b_1^p},\quad \beta_2=\sqrt[q]{b_2^p},\quad \beta_3=\sqrt[q]{b_3^q}.$$

V. ALACI

418. — 1°. Să se arate că expresiunea:

$$\sqrt{x(x-1)}+x+1$$

este totdeauna pozitivă.

2°. Să se studieze semnul expresiunei:

$$-\sqrt{x(x-1)}+x+1.$$

N. ABRAMESCU

419. — A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, iar ω un unghiu care satisface relația:

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C,$$

să se arate că avem și:

$$\sin(\omega-A)\sin(\omega-B).\sin(\omega-C)=\sin\omega\cos 2\omega,$$

și reciproc.

TIB. POPOVICI

INFORMATIUNI

In editura „Cultura Națională“ București, a apărut cartea d-lui profesor *Traian Lalescu*, *„Calculul Algebric“*. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la *„Cartea Românească“*, București; prețul 80 lei.

In biblioteca „Gazetei Matematice“ a reapărut cartea d-lui profesor *Niculae Abramescu*, „Lecțiuni de Algebră Superioară, Teoria ecuațiilor“. O recomandăm călduros corespondenților noștri, fiindu-le de un real folos. A se adresa la „Gazeta Matematică“, Fabrica de chibrituri, Filaret, București, prețul 80 lei.

Au fost recomandați de consiliul de perfecționare al Școalei Politechnice din Timișoara, pentru a fi numiți ca profesori la catedrele notate în dreptul fiecăruia următorii:

Ing. I. Protopopescu — Construcții civile.
Dr. I. Magheru — Fizica generală.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ȘASEZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,
Directorul Școalei Superioare P. T. T.
Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL IV. 15 FEBRUARIE 1925 NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. DILI C. SCHILERU. TEOREMA LUI LEIBNITZ SI LAGRANGE.
2. NOTE MATEMATICE, 19.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 360, 365, 366, 367, 368, 370, 373, 375, 402.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei.

ANUL IV. — NO. 12 TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

TEOREMA LUI LEIBNITZ ȘI LAGRANGE

de DILI C. SCHILERU

Fie O *o origină oarecare* $A_i (i=1 \ldots n)$ *n puncte fixe cărora le aplicăm forțele paralele* $\overline{P}_i (i=1 \ldots n)$, G *centrul acestor forțe paralele; dacă considerăm forțele* $P_i . \overline{OA}_i (i=1 \ldots n)$ *dirijate după* $OA_i (i=1 \ldots n)$, *rezultanta lor* $\overline{R}$ *va fi dirijată după* $\overline{OG}$ *și egală cu:* $\sum_1^n P_i . \overline{OG}$.

Voi da acestei cunoscute teoreme o demonstrație vectorială, ea fiind demonstrată scalar în: „Recueil d'exercices sur la Mécanique Rationelle. A De Saint-Germain pag. 28".

Pentru aceasta voi lua un vector unitar $\overline{u}$ paralel cu sistemul de forță $\overline{P}_i$ $(i=1 \ldots n)$.

Evident că voi avea:

$$(\alpha) \quad \overline{P}_i = P_i . \overline{u} \ (i=1 \ldots n) \quad \text{și} \quad \sum_1^n \overline{P}_i = \overline{u} \sum_1^n P_i$$

Luând momentele în raport cu punctul O, ale forțelor $\overline{P}_i$ și al rezultantei lor $\sum_1^n \overline{P}_i$ și ținând seamă de notațiile (α) voi avea:

$$\sum_1^n P_i . \overline{OG} \times \overline{u} = \sum_1^n P_i . \overline{OA}_i \times \overline{u}$$

sau:

$$(\beta) \qquad \sum_1^n P_i . \overline{OG} = \sum_1^n P_i \overline{OA}_i$$

Egalitatea vectorială (β) ne arată:

1) Că sistemul de forțe $P_i . \overline{OA}_i (i=1, 2 \ldots n)$ admite ca rezultantă $\sum_1^n P_i . \overline{OG}$.

2) Direcțiunile forțelor $P_i \overline{OA}_i (i=1.2 \ldots n)$ sunt respectiv $\overline{OA}_i (i=1, 2 \ldots n)$ aceasta evident după definiția unui scalar c'un vector, deci și $\sum_1^n P_i . \overline{OG}$ are direcțiunea $\overline{OG}$. Deci teorema e demonstrată.

Observație. O demonstrație imediată a acestei teoreme ne dă formula (2') din cursul de mecanică. An. I predat de d-l Prof. *V. Vâlcovici*, pag. 86. Voi face apropriere între această formulă și teorema de mai sus.

Această formulă relativă la determinarea centrului unui sistem de forțe paralele este:

$$\overline{\rho} = \frac{k_1 r_1 + k_2 r_2 + \ldots + k_n \overline{r}_n}{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n},$$

unde $\overline{\rho}$ este vectorul care determină centrul forțelor paralele iar $\overline{r}_1 \overline{r}_2 \ldots \overline{r}_n$ vectori care determină punctul lor de aplicație față de o origină aleasă după voie și $k_1 \ k_2 \ldots k_n$ intensitățile sistemului de forțe. Gonind numitorul al acestei formule avem:

$$(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \overline{\rho} = k_1 \overline{r}_1 + k_2 \overline{r}^2 + \ldots + k_n \overline{r}_n,$$

care nu este decât sus enunțata teoremă.

In cele de mai jos voi demonstra vectorial câteva relații dependente de această teoremă, pe cale vectorială, în sus citatul manual fiind demonstrate scalar.

Inmulțind egalitatea vectorială (β) scalar prin ea însăși voi avea:

$$\left(\sum_1^n P_i \right)^2 \overline{OG}^2 = \sum_1^n P_i^2 . \overline{OA}_i^2 + 2 \sum P_i . P_k . \overline{OA}_i . \overline{OA}_k$$

dar ținând seama de

$$2 . \overline{OA}_i . \overline{OA}_k = 2 \overline{OA}_i . OA_k \cos (OA_i OA_k)$$
$$= \overline{OA}_i^2 + \overline{OA}_k^2 - \overline{A_i A_k}^2$$

avem :

$$(\gamma)\quad \left(\sum_1^n P_i\right)^2 . \overline{OG}^2 = \sum_1^n P_i . \sum_1^n P_i \overline{OA_i}^2 - \sum P_i P_k \overline{A_i A_k}^2$$

Dacă punctul O coincide cu G egalitatea vectorială (β) ne arată că sistemul de forţe $P_i \overline{GA_i}$ $(i=1 \ldots n)$ este un sistem nul.

In virtutea celor mai de sus putem da o construcţie a rezultantei unui sistem de mai multe forţe concurente.

Fie un sistem de forţe concurente : $P_i \overline{OA_i} = \overline{F_i} (i=1,\ 2 \ldots n)$.

Rezultanta sistemului $\overline{F_i} (i=1,\ 2 \ldots n)$ se află astfel : Măsurăm lungimile $OA_i = l_i$ după $\overline{OA_i}$ aşezăm massele $\frac{\overline{F_i}}{l_i}$ $i=1,\ 2 \ldots n$ în punctele A_i $i=1, 2 \ldots n$. Dacă G este centrul masselor acestor particule atunci $\overline{OG}$ este linia de acţiune a rezultantei sistemului $\overline{F_i} (i=1,\ 2 \ldots n)$ şi a cărei mărime este $\overline{OG} . \sum_1^n \frac{F_i}{l_i}$.

Aceasta formează obiectul unei probleme propuse în calculul vectoriel par I. G. Coffin pag. 22, No. 31.

Cazul : $\sum_1^n P_i = 0$. Voi presupune că forţele dela $i=1$ până la $i=k$ au un semn iar celelalte dela $i=k$ până la $i=n$, au un semn contrar având şi condiţiile : $\sum_1^k P_i \neq 0$ $\sum_{k+1}^n P_i \neq 0$; fie G_1 şi G_2 centrele sistemelor $\sum_1^k P_i$ şi $\sum_{k+1}^n P_i$ aplicând acestor două sisteme teorema lui *Leibnitz* şi *Lagrange* avem :

$$\sum_1^k P_i \overline{OG_1} = \sum_1^k P_i OA_i \qquad \sum_{k+1}^n P_i \overline{OG_2} = \sum_{k+1}^n P_i \overline{OA_i}$$

adunând aceste două egalităţi vectoriale membru cu membru şi ţinând seama că $\sum_1^k P_i = -\sum_{k+1}^n P_i$ căci : $\sum_1^n P_i = \sum_1^k P_i + \sum_{k+1}^n P_i = 0$ avem însemnând cu $\overline{R}$ rezultanta sistemului $P_i \overline{OA_i}$ $i=1, 2 \ldots n$.

$$(\delta)\quad \overline{R} = \sum_1^k P_i (\overline{OG_1} - \overline{OG_2}) = \sum_1^k P_i \overline{G_1 G_2}.$$

Deci rezultanta sistemului $P_i OA_i$ $i-1, 2 \ldots n$ păstrează o mărime şi direcţiune constantă, sau mai bine zis un vector constant, oricare ar fi punctul O.

Să ne punem întrebarea : Care este poziţia punctului O astfel ca sistemul de forţe $\overline{OA_i} \overline{P_i}$ $i=1,\ 2 \ldots n$ şi P_i să-şi facă echilibru. Condiţia de echilibru este evident, ţinând seama de relaţia (β),

$$(\varepsilon)\quad \sum_1^n \overline{P_i} + \sum_1^n P_i \overline{OG} = (\overline{u} + \overline{OG}) \sum_1^n P_i = 0$$

*** $\overline{OG} = -u$ sau $\overline{GO} = \overline{u}$ $\overline{u}$ fiind un vector unitar paralel cu sistemul $\overline{P_i}$. (N'am luat momentele căci sistemul P_i şi $\sum_1^n P_i \overline{OA_i}$ se reduc respectiv la două forţe concurente în G în cazul când $\sum \overline{P_i} \neq 0$). Când $\sum \overline{P_i} = 0$, formula (ε) ar da un caz de echilibru ceiace nu se poate în virtutea formulei δ.

Problemă. 1) Care este locul punctului O astfel ca sistemul de forţe $P_i \overline{OA_i}$ $i=1, 2 \ldots n$ să aibă o rezultantă în mărime absolută constantă.

Va trebui să avem :

$$\left|\sum_1^n P_i \overline{OG}\right| = \left|\overline{k}\right| \quad \text{sau} \quad \overline{OG}^2 = \frac{\overline{k}^2}{\left(\sum_1^n P_i\right)^2} = \overline{GO}^2$$

locul este deci o sferă cu centrul în G şi de rază $\frac{k}{\sum_1^n P_i}$ pentru $\overline{k} = 0$ sfera degenerează în punctul G, rezultat găsit mai sus când O coincide cu G. Cazul $\sum P_i = 0$ nu mai e de analizat în virtutea relaţiei δ.

II. Care este locul geometric al punctului O astfel ca sistemele $\sum_1^n \overline{P_i}$ şi $\sum_1^n P_i \overline{OA_i}$ să aibă o rezultantă în mărime absolută constantă.

Va trebui ca :

$$\left|\sum_1^n P_i (\overline{u} + \overline{OG})\right| = \left|\overline{k}\right| \text{ sau } (\overline{GO} - \overline{u})^2 = \left(\frac{\overline{k}}{\sum_1^n P_i}\right)^2$$

care este o sferă cu centrul în $\overline{u}$ şi e rază $\frac{k}{\sum_1^n P_i}$. Când $\overline{k} = 0$ sfera degenerează în punctul $\overline{u}$ ($\overline{u}$ vector unitar).

NOTE MATEMATICE

19. — *O însumare trigonometrică.* Ne propunem a efectua pe cale algebrică, fără a folosi cunoştinţele asupra derivatelor, următoarea însumare:

$$\sin t+3\sin 3t+5\sin 5t+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)t$$

Vom efectua în primul rând următoarea împărţire:

$$\frac{(2n-1)(x^{4n+2}-1)-(2n+1)(x^{4n}-x^2)}{(x^2-1)^2}$$

Observăm că putem scri succesiv:

$$\frac{(2n-1)(x^{4n+2}-1)-(2n+1)(x^{4n}-x^2)}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{(2n-1)(x^{4n}+x^{4n-2}+\ldots+x^2+1)-(2n+1)(x^{4n-2}+x^{4n-4}+\ldots+x^2)}{x^2-1}=$$

$$\frac{(2n-1)x^{4n}-2(x^{4n-2}+x^{4n-4}+\ldots+x^2)+(2n-1)}{x^2-1}$$

$$=(2n-1)x^{4n-2}+(2n-3)x^{4n-4}+\ldots+3x^{2n+2}$$

$$+x^{2n}-x^{2n-2}-3x^{2n-4}-\ldots-(2n-3)x^2-(2n-1)$$

Împărţind ambii membrii cu x^{2n-1} şi grupând în membrul al doilea termenii cu acelaşi coeficient, începând cu cei din mijloc, avem:

$$(1)\quad \frac{(2n-1)\left(x^{2n+1}-\frac{1}{x^{2n+1}}\right)-(2n+1)\left(x^{2n-1}-\frac{1}{x^{2n-1}}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)+3\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\ldots$$

$$\ldots+(2n-1)\left(x^{2n-1}-\frac{1}{x^{2n-1}}\right)$$

Acum punem: $x=e^{it}$

$$^{*}_{*}{}^{*}\quad x^{\alpha}=e^{i\alpha t},\quad \frac{1}{x^{\alpha}}=e^{-i\alpha t},$$

şi conform unei formule cunoscute a lui *Euler*, putem scri:

$$x^{\alpha}-\frac{1}{x^{\alpha}}=e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}=2i\sin\alpha t,\quad i=\sqrt{-1}.$$

Dacă folosim dar această relaţie, unde facem $\alpha=1, 3, 5, \ldots 2n+1$, în relaţia (1), obţinem;

$$2i\,\frac{(2n-1)\sin(2n+1)t-(2n+1)\sin(2n-1)t}{4i^2\sin^2 t}$$

$$=2i\left[\sin t+3\sin t+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)t\right]$$

$$^{*}_{*}{}^{*}\quad \sin t+3\sin 3t+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)t$$

$$=\frac{(2n+1)\sin(2n-1)t-(2n-1)\sin(2n+1)t}{4\sin^2 t}$$

Avem astfel tocmai însumarea dorită.

V. ALACI

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Lucrare scrisă, anul I

14 Ianuarie 1925.

Geometria Analitică

Pe axa Ox se iau 2 puncte fixe A şi A′. Fie B şi B′ două puncte pe o paralelă la Oy care întâlneşte pe Ox în H. Ştiind că

$$\frac{HB}{HB'}=k$$

se cere locul geometric al punctului de întâlnire al diagonalelor şi laturilor patrulaterului A A′ B B′. 1°, în cazul când H rămâne fix iar B şi B′ variază. 2°, când H se mişcă pe Ox iar B şi B′ pe nişte paralele la Ox.

Fie O un punct în spaţiu şi A B C D un tetraedru dat. Se prelungesc dreptele AO, BO, CO, DO până în punctele A′, B′, C′, D′ în care întâlnesc feţele opuse ale tetraedrului. Să se demonstreze că suma:

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}$$

este constantă oricare ar fi O.

Durata 2 ore.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 5, Ianuarie 1925. Asupra relaţiilor de recurenţă lineare, şi omogene şi cu coeficienţi constanţi, de *A. Angelescu*. Două triunghiuri importante, de *M. Grümbaum*.

2. *Foaia Matematică*, anul II, Ianuarie 1925. După un an, *Comitetul*. Asupra seriei Hipergeometrice, de *Solomon Weiss*.

CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA

Un prieten al Revistei noastre ne a pus discret, la dispoziție suma de 1000 de lei în vederea unui concurs între corespondenții ultimelor numere. Elaborând condițiunile concursului, am încercat să strângem aprecierea noastră într'o haină rigidă numerică, pentru a reduce elementul personal al judecătorului la un minimum de influență. Am acordat câte un punct bun pentru broblemele rezolvate înainte de publicarea concursului, câte două puncte pentru acelea de după data publicării și în fine câte cinci puncte bune pentru probleme cărora noi le-am dat o greutate deosebită însemnându-le în mod special cu câte un asterisc. Clasificarea am făcut-o după suma punctelor bune obținute de fiecare din cei 25 candidați înscriși la acest concurs.

Rezultatul acestei clasificări nu cade prea departe de aprecierea pe care am fi făcut-o noi pe nuanțe de calitate.

Nu este o simplă întâmplare. Este natural ca deslegătorul celui mai mare număr de probleme să fie și cel care dă soluțiile cele mai bune. Dacă se întâmplă câte odată altfel, apoi acele cazuri sunt cazuri de excepție.

S'au înscris în termen, după cum am menționat, 25 de candidați dintre care doi n'au obținut nici un punct.

Corespondentul care a obținut numărul maxim de puncte este D-l **Berdan I. C.** (100 de puncte), *student al Școalei Politechnice din București.* Domnia-sa se distinge între toți corespondenții noștri printr'o capacitate specială de a cuprinde problema în întregul ei și de a-i da generalizarea cea mai potrivită. Un model în care d-l Berdan și-a putut expune frumoasele d-sale calități este soluția problemei 390.

D-lui Berdan i se cuvine premiul nostru de 1000 de lei.

Iată acum și numele celor cinci corespondenți care-i urmează în clasificarea noastră după numărul de puncte obținute.

1. D-l **Tărăbuță C. Paul** (98 de puncte), *elev al liceului Mihai-Viteazul din București*, este un conștiincios lucrător care promite o desvoltare frumoasă a talentului său de matematician. Ordinea care domnește în redactarea sa, îngrijirea pe care o pune în redarea figurilor sunt calități care îi vor netezi calea științifică. Este singurul corespondent care a atacat problema 372 rezolvind-o complect și făcând unele observațiuni interesante.

2. D-l **Ștefănescu Emil** (92 de puncte), *elev al liceului Spiru C. Haret din București*, dă dovadă, în soluțiile prezentate, de un spirit fin de analiză și de putere de generalizare. Este un propunător de probleme de o remarcabilă fecunditate. Redacția totdeauna este îngrijită și aleasă.

3. D-ra *Blasko Beatrix* (91 puncte), *elevă în Farmacie*, dă o serie de soluții gândite și frumos rânduite. Problemei 398 i-a dat o soluție și o generalizare de o rară eleganță, servindu-se numai de noțiuni cu totul elementare.

4. D-l **Popovici Th. Ioan** (88 puncte) *student al Școalei Politechnice din București*, ne-a prezentat o serie de soluții însoțite de observațiuni interesante dovedind un spirit critic care pătrunde în adâncul problemei.

5. D-l **Botea G. Nicolae** (84 puncte) *elev al liceului Cantemir din București*, are o putere de muncă ordonată și serioasă care-i creiază împrejurări favorabile de desvoltare a calităților sale științifice.

In total luat, acest concurs care a însemnat o sforțare nouă pentru corespondenții noștri, ne-a pus într'o lumină mai precisă o clasificare pe care, cu mici modificări, o făcusem noi chiar înaintea acestei probe, conduși fiind de activitatea anterioară a candidaților. Ne-a bucurat începutul de maturitate științifică al unora dintre corespondenții noștri concurenți. Lista lor nu se mărginește numai la cei șease citați mai sus; ea este mult mai lungă. Totuși ne așteptam să fie mai complectă. Ne așteptam mai ales ca numărul cadidaților din liceele provinciilor alipite să fie mai mare. Este o lipsă care se resimte de altfel și la examenele de intrare la școalele speciale și care ar trebui să intereseze mai mult pe guvernanții noștri.

Aceasta ar fi una din laturile utile ale concursurilor Revistei noastre.

VICTOR VALCOVICI

PROBLEME REZOLVATE

360. — *Dacă* $a \pm b$ *şi* $\alpha \pm \beta$ *se divide cu* m, *atunci şi* $a\alpha - b\beta$ *şi* $a\beta - b\alpha$ *se va divide cu* m.

CAP. I. LINTES

Prima soluţie dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Florea Al.* (lic. Internat, Iaşi), *Ghinicescu I. Gheorghe* (liceul Internat, Iaşi), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Mares Marius* (lic. Arad), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Muşta Ştefan* (student, Cluj), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Din ipoteze deducem:

$$a = \mathrm{M}.m \mp b, \quad \alpha = \mathrm{M}.m \mp \beta, \quad \pm\beta = \mathrm{M}.m - \alpha.$$

Multiplicăm prima relaţie pe rând cu celelalte două avem:

$$a\alpha = \mathrm{M}.m + b\beta, \quad \pm a\beta = \mathrm{M}.m \pm b\alpha$$

$$a\alpha - b\beta = \mathrm{M}.m, \quad a\beta - b\alpha = \mathrm{M}.m,$$

ceiace era de dovedit.

Soluţia 2-a dată de d-nii: *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov) *Iliovici Gh. C-tin* (lic. Ploeşti).

Din ipoteză, avem:

$$a + b = \mathrm{M}.m, \quad \alpha + \beta = \mathrm{M}.m.$$

Multiplicând prima relaţie cu α şi a 2-a cu b şi scădem, găsim:

$$a\alpha - b\beta = \mathrm{M}.m.$$

Multiplicăm apoi tot prima relaţie cu β şi a 2-a b şi scădem, găsim:

$$a\beta - b\alpha = \mathrm{M}.m$$

Tot astfel din ipoteza:

$$a - b = \mathrm{M}.m, \quad \alpha - \beta = \mathrm{M}.m,$$

multiplicând cu α prima relaţie şi a 2-a cu b, adunând, găsim:

$$a\alpha - b\beta = \mathrm{M}.m.$$

Aceleaşi relaţii multiplicate, prima cu β şi a 2-a cu b şi scăzute, ne dau:

$$a\beta - b\alpha = \mathrm{M}.m.$$

Soluţia 3-a dată de d-nii: *Angelo Ionescu* (lic. Cluj), *Popp Iulian* (Cluj), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov) şi *Vlădea Ioan.*

Scriind expresiunile $a\alpha - b\beta$, $a\beta - b\alpha$ sub formă de determinant şi aplicând o proprietate cunoscută a determinanţilor putem scrie:

$$a\alpha - b\beta = \begin{vmatrix} a & \beta \\ b & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \pm b & \beta \pm \alpha \\ b & \alpha \end{vmatrix},$$

$$a\beta - b\alpha = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \pm b & \alpha \pm \beta \\ b & \beta \end{vmatrix}$$

Cum elementele primii linii a ultimilor determinanţi din cele două egalităţi se divid prin ipoteză cu m, rezultă că şi primii membrii, adică:

$$a\alpha - b\beta, \quad a\beta - b\alpha,$$

se divide cu m.

Alte soluţii date de d-nii: *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Botez St. Mihail, Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Comănescu Al.* (Bălteni), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Florescu Octavian* (lic, Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Goldstein N.* (C.-Albă), *Gradiny I. Gheorghe* (Timişoara), *Grubeumann I. Gr.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *C-tin Th. Ionescu Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (Amărăştii de Jos), *Ketétz Paul, Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Pamula Alex.* (lic. Botoşani), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popescu Spirea* (lic. M-rea Dealu), *Rauchbach Arthur, Roşu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rucăreanu Nic.* (lic. Braşov), *Şerban Tib.* (Zărneşti), *Spârchez Zeno* (Timişoara), *Stănescu-Teodoru* (lic. M-rea Dealu). *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vasiliu Şt*

Observări. 1. D-nii: *Mușta Șt.* (Cluj) și *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), observă că și expresia:

$$(a^2+b^2)\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2)ab.$$

se divide cu m^2, ceiace reiese, înmulțind relațiile stabilite:

$$a\alpha-b\beta=M.m,\quad a\beta-b\alpha=M.m.$$

2. D-l: *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), generalizează problema și din expresiile:

$$a\alpha-b\beta,\quad a\beta-b\alpha$$

care s'au arătat că sunt multiple de m, deduce în virtutea a însăși enunțului că și expresiile mai generale:

$$a^2\alpha\beta\pm b^2\alpha\beta,\quad ab\alpha^2\pm ab\beta^2,$$

sunt multipli de m.

3. D-l: *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu) demonstrează că, dacă:

$$a\pm b\pm c,\quad a'\pm b'\pm c',\quad \alpha\pm\beta\pm\gamma,$$

se divide cu m, și expresiile:

$$ab'\gamma+a'\beta c+\alpha bc'-cb'\alpha-c'\beta a-\gamma ba',\ \text{etc.}$$

se divide cu m, ceiace rezultă scriind această expresie sub forma de determinant, observând că:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\pm b\pm c & b & c \\ a'\pm b'\pm c' & b' & c' \\ \alpha\pm\beta\pm\gamma & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

și ținând seamă de enunț.

365.—*Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(x+y-2xy+xy^2+x^2y)+x^2y^2=35 \\ x^2+z^2-2(x+z-2xz+xz^2+x^2z)+x^2z^2=143 \\ y^2+z^2-2(y+z-2yz+yz^2+y^2z)+y^2z^2=63 \end{cases}$$

GEORGESCU JEAN

Soluție dată de d-nii: *Tăraș Vasile* (lic. Brașov) și *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București).

Prima ecuație se poate scrie:

$$x^2(1-2y+y^2)-2x(1-2y+y^2)+y^2-2y=35$$

$$\overset{*}{**}\quad (1-2y+y^2)(x^2-2x+1)=36$$

sau: $$(x-1)^2(y-1)^2=36.$$

De unde: $$(x-1)(y-1)=\pm 6.$$

Procedăm analog pentru celelalte ecuații și sistemul dat devine:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x-1)(y-1)=\pm 6 \\ (x-1)(z-1)=\pm 12 \\ (y-1)(z-1)=\pm 8. \end{cases}$$

Multiplicând aceste ecuații, găsim:

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2=\pm 576$$

$$\overset{*}{**}\quad (x-1)(y-1)(z-1)=\pm 24,$$

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\pm 24i,\quad i=\sqrt{-1}.$$

Impărțind aceste ecuații pe rând cu ecuațiile sistemului (2), deducem:

$$\begin{cases} z-1=\pm 4 \\ y-1=\pm 2 \\ x-1=\pm 3 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} z-1=\pm 4i \\ y-1=\pm 2i \\ z-1=\pm 3i \end{cases}$$

Deducem deci pentru x, y, z următoarele 16 sisteme de soluții, 8 reale și 8 imaginare, anume:

x	4	4	4	4	−2	−2	−2	−2
y	3	3	−1	−1	3	3	−1	−1
z	5	−3	5	−3	5	−3	5	−3

și:

x	$3i+1$	$3i+1$	$3i+1$	$3i+1$	$-3i+1$	$-3i+1$	$-3i+1$	$-3i+1$
y	$2i+1$	$2i+1$	$-2i+1$	$-2i+1$	$2i+1$	$2i+1$	$-2i+1$	$-2i+1$
z	$4i+1$	$-4i+1$	$4i+1$	$-4i+1$	$4i+1$	$-4i+1$	$4i+1$	$-4i+1$

Au dat numai o parte din soluțiile de mai sus d-nii: *Botea Gh. Nicolae* [București], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Diaconescu V Teodor* [lic. Caracal], *Frătici Ioan* [lic. Brașov], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Goldstein N.* [Cet.-Albă], *Ianculescu Octavian* [Rusca Montană], *Iliescu Șt. Dima* [lic. Tg.-Mureș], *C-tin Th, Ionescu Bujor* [lic. Cantemir, București], *Ionescu I. Paul* [Amărăștii-de-Jos], *Neumann Maria* [student, Lugoj], *Popescu Th. Ioan, Popovici Aurel* [Focșani], *Purdilă C-tin* [lic. Brașov], *Roșu Alex., Simionescu D. Gh.,* [lic. M-rea Dealu], *Tărăbuță C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Vasiliu H. Șt.* și *Vlădea Ioan* [liç. Brașov].

Observări. 1. D-nii: *Botea Gh. Nicolae, Ciorănescu I. C-tin* și *Neumann Maria*, au generalizat problema, considerând un sistem care redus devine:

$$\begin{cases} (ax+b)^2(cy+d)^2 = m^2 \\ (ax+b)^2(ez+f)^2 = n^2 \\ (cy+d)^2(ez+f)^2 = p^2. \end{cases}$$

Se rezolvă analog cu cel dat.

2. D-l *C-tin Th. Ionescu Bujor* a generalizat problema, considerând un sistem mai general, înlocuind în sistemul de mai sus peste tot exponentul 2 cu exponentul întreg r.

366. — *Să se rezolve în numere întregi ecuația:*

$$x^3 + y^3 = (x+y)^2.$$

TAUBER ALEXANDRU

Ecuația dată se poate scri:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2$$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $x+y=0$ și $x^2 - xy + y^2 = x+y$

Prima ecuație e satisfăcută pentru $x = -y = n$ n fiind un întreg oarecare.

Ecuația 2-a se poate scri:

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad x = \frac{y+1 \pm \sqrt{-3y^2+6y+1}}{2}$$

Pentru ca x să fie real, trebuie ca:

$$-3y^2+6y+1 > 0, \text{ sau } 3y^2 - 6y - 1 < 0,$$

deci y trebuie să fie cuprins între rădăcinele trinomului, anume:

$$1 - \frac{\sqrt{13}}{3} < y < 1 + \frac{\sqrt{13}}{3}$$

sau: $$0,\ 2 < y < 2,\ 2$$

y fiind întreg, nu poate fi de cât 0, 1, 2 în care caz privind valorile lui x, găsim:

Când $y=0,\ x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

„ $y=1,\ x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

„ $y=2,\ x = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

Afară de sistemul $x = -y = n$, n un întreg oarecare poate cuprinde și pe $x = y = 0$, avem încă sistemele de soluții:

$\begin{cases} x=1 \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1, \end{cases}$

Soluții bune date de d-nii: *Antistescu Nicola* [lic. Internat, Iași], *Beju T.* [lic. Arad], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Botea G. Nicoale* [București], *Braeșter Otto* [lic. Național, Iași], *Căldăraru Leon* [București], *Comănescu Al.-Bălteni, Curcubată D.* [lic. Brașov], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iași], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *Gataianțu V. Barbu* [lic. Caracal], *Gârleșteanu Mihail* [Șc. Polit. Timișoara], *Georgescu Jean* [lic. M-rea Dealu], *Ghelber Mauriciu* [Sem. Ped. București], *Ianculescu Octavian* [Rusca-Montană], *Iliovici Gh. C-tin* [lic. Ploești], *C-tin Th. Ionescu Bujor* [lic. Cantemir, București], *Iscovici Paul* [lic. Pitești], *Lepădatu I. V.* [lic. Internat, Iași], *Mihăilescu C. Grigore* [Oradia-Mare], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Musta Ștefan* [Cluj], *Nicolau G. C.* [lic. R.-Sărat], *Pamula Alexandru* [lic. Botoșani], *Podeanu Aurel* [lic. Pitești], *Popa Ilie* [lic. Internat, Iași], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iași], *Popovici Th. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Purdilă C-tin* [lic. Brașov], *Pușcă Toma* [lic. Internat, Iași], *Râpeanu Virgil* [lic. Internat, Iași], *Roșu Alexandru, Schächter O., Stănciulescu A. George* [Pitești], *Stoica N. Aurel* [lic. Cantemir, București], *Tărăbuță C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Tăraș Vasile* [lic. Brașov], *Tunaru R. Traian* [Craiova], *Țigoiu Ioan* [Șc. Comerț, Constanța], *Vasilescu Bartolomeu* [lic. Sf. Sava, București], *Vasiliu N. Șt.* [Iași], *Vlădea Ioan* [lic. Brașov].

367. — *Să se demonstreze că in orice triunghiu există relația:*

$$r + R\sum \sin A \sin B \cos C = \frac{p^2 - r^2}{4R}$$

LEPADATU VICTOR

Pornind dela formulele cunoscute:

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$s = \frac{abc}{4R} = pr,$$

putem scri succesiv:

$$r + R\sum \sin A \sin B \cos C = r + R\sum \frac{a^2+b^2-c^2}{8R^2}$$

$$= \frac{abc}{4pR} + \frac{a^2+b^2+c^2}{8R} = \frac{2abc+p(a^2+b^2+c^2)}{8pR}$$

$$= \frac{2abc+p\left[(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)\right]}{8pR}$$

$$= \frac{abc+2p^3-p(ab+ac+bc)}{4pR}$$

$$= \frac{p^3-(p-a)(p-b)(p-c)}{4pR} = \frac{p^3-\frac{s^2}{p}}{4pR}$$

$$= \frac{p^4-p^2r^2}{4p^2R} = \frac{p^2-r^2}{4R}$$

ceiace era de dovedit.

Au dat soluțiuni bune folosind relațiunea:

$$a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r^2-4Rr)$$

din „G. M." an. XXIX, pag. 112, d-nii: *Apostol Carol* [lic. Internat, Iași], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bleiweiss Paul* [lic. Cantemir, Buc rești], *Botea G. Nicolae* [București], *Braeșter I. Otto* [lic. Național, Iași], *Budișteanu Al.* [lic. M-rea Dealu], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iași], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iași], *Ghinicescu I. Gh.* [lic. Internat, Iași], *Gradiny I. Gheorghe* [Șc. Polit. Timișoara], *Grofșorean I. Gheorghe* [lic. Lugoj], *Iacobi Șt. Eugen* [Botoșani], *Ionescu P. Angelo* [lic. Cluj], *Ionescu I. Paul* [Amărăștii de Jos], *Manoil Adolf* [lic. Roman], *Marinescu I. Ioan* [lic. M-rea Dealu], *Nicolau C.* [R.-Sărat], *Popovici Aurel* [lic. Focșani], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iași], *Popovici Th. Ion* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Ruxanda Gheorghe* [lic. Arad], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spacu Gh. Petru, Stoica N. Aurel* [București], *Tărăbuță C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Tăraș Vasile* [lic. Brașov], *Tunaru R. Traian* [lic. Craiova], *Vlădea Ioan* [lic. Brașov],

D-l *Popovici Th. Ioan* a mai dat o soluție, folosind identități algebrice pe care le-a transformat.

368. — *In orice triunghiu avem relația:*

$$\frac{2r}{abc}(ar_a+br_b+cr_c) = \frac{h_a-h_b}{r_b-r_a} + \frac{h_b-h_c}{r_c-r_b} + \frac{h_c-h_a}{r_a-r_c}$$

DROGEANU NICOLAE

Folosim formulele cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a},\ h_b = \frac{2s}{b},\ r_a = \frac{s}{p-a},\ r_b = \frac{s}{p-b},\ r_c = \frac{s}{p-c}$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = s^2,\ s = pr,$$

și observăm că putem scri succesiv:

$$(1)\ \frac{h_a-h_b}{r_b-r_a} = \frac{\frac{2s}{a}-\frac{2s}{b}}{\frac{s}{p-b}-\frac{s}{p-a}} = \frac{2(p-a)(p-b)}{ab}$$

$$= \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)ab} = \frac{2s^2}{p(p-c)ab}$$

$$= \frac{2sr_c}{p.a.b} = \frac{2r}{abc}.cr_c.$$

Analog avem:

$$(2)\ \frac{h_b-h_c}{r_c-r_b} = \frac{2r}{abc}.ar_a\ \ (3)\ \frac{h_c-h_a}{r_a-r_c} = \frac{2r}{abc}.br_b$$

Atunci adunând relațiile (1), (2) și (3), găsim:

$$\frac{h_a-h_b}{r_b-r_a} + \frac{h_b-h_c}{r_c-r_b} + \frac{h_c-h_a}{r_a-r_c} = \frac{2r}{abc}(ar_a+br_b+cr_c$$

tocmai relația cerută.

Soluții bune date de d-nii: *Apostol Carol* [lic. Internat, Iași], *Beju Traian* [lic. Arad], *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Bleiweis Paul* [lic. Cantemir, București], *Bernardis Berardo* [lic. R.-Sărat], *Botea G. Nicolae* [București], *Braeșter I. Otto* [lic. Național, Iași], *Budișteanu Al.* [lic. M-rea Dealu], *Caftangioglu C. C-tin* [lic. R.-Sărat], *Căldăraru Leon* [lic. Șincai, București], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Constantinescu D. D-tru* [lic. Cantemir, București], *Costăchescu N. Ionel* [lic. Brăila], *Critz D. M.* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Drăghici Aurelian* [lic. Tg.-Jiu], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iași], *Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iași], *Gârleșteanu Mihail* [Șc. Polit. Timișoara], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Gheorghiu V.* [lic. Tg.-Jiu], *Ghelber Mauriciu* [Sem. Ped. București], *Ghinicescu I. Gheorghe* [lic. Internat, Iași], *Gradiny I. Gheorghe* [Șc. Polit. Timișoara], *Grigore T. Virgil* [lic. T.-Jiu], *Grofșoreanu I. L. Ghcorghe* [lic. Lugoj], *Iacob St. Eug.* [Botoșani], *Ianculescu Octavian* [Rusca Montană], *Ionescu P. Angelo* [lic. Cluj], *Ionescu I. Paul* [Amărăștii-de-Jos], *Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iași], *Manoil Adolf* [lic. Roman], *Marinescu I. Ion* [lic. M-rea Dealu], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Milner I., Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Musta Ștefan* [Cluj], *Neumann Maria* [studentă, Lugoj], *Nicolau G. C.* [lic. R.-Sărat], *Pamula Alexandru* [lic. Botoșani], *Podeanu Aurei* [lic. Pitești], *Polaczek Franz* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Popescu I. Ep.* [lic. Galați] *Popescu Dem. Marin* [lic. Giurgiu], *Popescu N. Niculai* [Șc. Polit. Timișoara], *Popovici Aurel* [Focșani], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iași], *Popovici Th. Ion* [lic. Mihai-Viteazul, București], *Rădulescu Nicolae* [lic. Caracal], *Rauchbach Arthur* [lic. Gura-Humorului], *Rusanda Gheorghe*

[lic. Arad], *Schächter O.*, *Şerban I. Tiberiu* [lic. Zărneşti], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spacu Gh. Petru*, *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Staicu Irimie* [lic. Braşov], *Stamatiu I. Mihail* [Şc. Polit. Bucureşti], *Stoica Aurel* [Bucureşti], *Tache R. Gheorghe* [lic. Piteşti], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Tăraş Vasile* [lic. Piteşti], *Tunaru R. Traian* [lic. Craiova], *Vasilescu Bartolomeu* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Vlădea Ioan* [lic. Braşov] şi *Wallechner Emil* [Govora].

Observare. D-nii: *Botea Nicolae* [Bucureşti] şi *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov] au stabilit încă următoarele relaţii:

$$\sum \frac{h_a - h_b}{r_a + r_b} = \frac{2r}{abc}\left[(b-a)r_c + (c-b)r_a + (a-c)r_c\right]$$

$$\sum \frac{h_a + h_b}{r_a + r_b} = \frac{2r}{abc}\left[(a+b)r_c + (c+a)r_b + (b+c)r_a\right]$$

370. — *Să se găsească numerile de trei cifre* abc, *astfel ca cifrele lor să satisfacă relaţia:*

$$7a + 3b = 4c.$$

EMIL STEFANESCU

Împărţim cu 4 relaţia dată şi observăm că putem scri:

$$c = 2a + b - \frac{a+b}{4}.$$

Pentru ca c să fie întreg, trebuie ca: $a + b = M\,4$ şi ţinând seamă că $a \neq 0$, b, c sunt de o singură cifră nu putem lua decât:

$$a + b = 4, \quad a + b = 8.$$

Dacă luăm, $a + b = 4$, avem $c = a + 3$ şi putem lua pentru a:

$a = 1, 2, 3, 4$ în care caz

$b = 3, 2, 1, 0$

$c = 4, 5, 6, 7.$

Dacă luăm, $a + b = 8$, avem $c = a + b$ şi putem lua pentru a:

$a = 1, 2, 3$

$b = 7, 6, 5$

$c = 7, 8, 9.$

Avem deci pentru abc următoarele 7 soluţii:

134, 225, 316, 407, 177, 268, 359.

Soluţii bune date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (Sem. Ped. Iaşi), *Babeş Alexandru* (lic. Internat Iaşi), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici Sigmund* (lic. Piteşti), *Berdan* C. (Bârlad, *Bernardis Berardo* (Şc. Polit. Timişoara), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasco Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter I. Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Brăileanu I. Marin* (lic. Caracal), *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Chinie Mihail* (Piteşti), *Comănescu Al.-Bălteni*, *Costăchescu N. Ionel* (lic. Brăila), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dorneanu S. V.* (lic. Internat, Iaşi), *Drugan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Florescu M. Octavian* (Caracal), *Frăţici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu I. Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. Bucureşti), *Gogan Alter* (lic. Chişinău), *Golcea C.* (studeńt), *Goldstein N.* (Cet.-Albă), *Grigore Nicolae* (Învăţător, Ialomiţa), *Gruneman Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iacob Şt. Eug.* (Botoşani), *Ionescu Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu P. Angelo* (lic. Cluj), *C-tin Th. Ionescu Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Nicu* (lic. Piteşti), *Ioniţă M. Ioan* (Sublot. de Artilerie), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz L.* (Botoşani), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Manoil Adol* (lic. Roman), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Mihăileanu C Grigore* (Oradia-Mare), *Milner I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Neumann Maria* (student, Lugoj), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Pasco Wilhelm* (Bucureşti), *Petrescu St. Al. Dan* (lic. Craiova), *Piperiu N. Nicuşor* (lic. Internat, Iaşi), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti). *Popa Ilie*, *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Chr. Jean* (Galaţi), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Zărneşti), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stănciulescu A. Gheorghe* (Piteşti), *Stănescu I. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu D. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Stoica Aurel* (lic. Cautemir, Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Vasiliu N. Şt.* (Iaşi), *Velea Gr. Mihail* (lic. Craiova) şi *Vlădea Ioan* (lic. Braşov).

373. — *Ce condiţie trebue să îndeplinească triunghiul* ABC *pentru ca să aibă loc relaţia:*

$$\overline{BC}^2 = AB(AB - AC).$$

ION PROTOPOPESCU

Soluţie dată de d. *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Dacă D este punctul de pe latura AB așa fel încât AD = AC relația dată este echivalentă cu:

$$\overline{BC}^2 = AB \cdot DB.$$

Sau $$\frac{BC}{DB} = \frac{AB}{BC}.$$

Rezultă că triunghiurile CBD și ABC sunt asemenea având un unghiu egal $(\hat{B})$ cuprins între laturi proporționale.

Deci: $$\widehat{DCB} = \widehat{CAB}.$$

Din triunghiul isoscel CAD avem:

$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{CAD}\right)$$

Atunci:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\left(\pi - \widehat{CAD}\right)$$

$$+\widehat{CAD} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{CAD}}{2}.$$

Sau notând cu α, β, γ unghiurile triunghiului ABC putem scrie:

(1) $$\gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Pe de altă parte într'un triunghiu trebue să avem:

$$\alpha + \gamma \leq \pi,$$

unde înlocuind pe γ cu valoarea din (1) obținem:

(2) $$\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \leq \pi \quad *** \quad \alpha \leq \frac{\pi}{3}$$

Deci pentru ca relația metrică dată să aibă loc trebue ca între două unghiuri ale triunghiului să avem relația de condiție (1) care antrenează relația (2).

Notă. 1) Relația de condiție (1), ținând seama ca $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, se mai poate scrie:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma - \beta).$$

2) Cercul circumscris triunghiului ACD e tangent în C la BC:

Soluție dată de d-nii: *Berdan C.* și *Popovici I.* (Șc. Polit., București), *Neumann Maria* (studentă, matematici), *Ștefănescu Emil, Dorneanu S. Vasile* și *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Tăraș V.* și *Vlădea Ion* (lic. Șaguna, Brașov) și *Segârceanu D. C-tin.*

Relația metrică dată fiind omogenă se pot înlocui laturile prin sinusurile unghiurilor opuse în virtutea relației:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}.$$

Cu această înlocuire relația de condiție se înlocuește cu alta echivalentă legând între ele unghiurile și anume:

$$\sin^2 A = \sin C (\sin C - \sin B)$$

*** $$\sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$$
$$= (\sin C - \sin A)(\sin C + \sin A)$$

*** $$\sin B \sin C = 2 \sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{C+A}{2}$$

$$2 \sin \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2} = \sin (C - A) \sin (C + A).$$

Sau fiindcă $A + B + C = \pi$.

$$\sin B \sin C = \sin (C - A) \sin B.$$

Pentru ca această relație să aibă loc trebue sau ca $\sin B = 0$ $(B = k\pi)$ condiție care reduce triunghiul la o dreaptă sau ca:

$$\sin C = \sin (C - A).$$

Pentru ca această ultimă relație să aibă loc trebue ca diferența arcelor să fie un multiplu par de π.

$$C - C + A = 2k\pi.$$

Sau ca suma arcelor să fie un multiplu impar de π:

$$C + C - A = (2k + 1)\pi.$$

Prima relație între arce dă $A = 0$ sau $A = \pi$, ceiace reduce triunghiul la o dreaptă.

A doua relație între arce dă:

$$2C - A = \pi \quad \text{sau} \quad C = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$$

și fiindcă $A + C \leq \pi$ rezultă $A \leq \frac{\pi}{3}$.

375. — *Să se determine numeric ecuațiile de forma:*

$$x^2 + px + q = 0$$

între rădăcinele și coeficienții căreia există relațiile:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1(2 - x_2) + x_2(2 - x_1)}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{p^2(p^2 - q^2) - q^2(q^2 - p^2)}{p(p - q) - q(q - p)} = 13. \end{cases}$$

GHELBER MAURICIU

Observăm că relațiile date se mai pot scri:

$$(1) \quad \frac{2(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2}{x_1 x_1 (x_1 + x_2)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{p^4 - q^4}{p^2 - q^2} = 13.$$

Din ecuația dată însă:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q,$$

așa că relațiile (1) devin:

$$\begin{cases} 6(p + q) = pq \\ p^2 + q^2 = 13. \end{cases}$$

Să rezolvăm acum acest sistem. Vedem că el se mai poate scrie:

$$(1) \quad \begin{cases} 6(p + q) = pq \\ (p + q)^2 - 2pq = 13. \end{cases}$$

De unde rezultă:

$$(p + q)^2 - 12(p + q) - 13 = 0,$$

deci:

$$p + q = 6 \pm \sqrt{36 + 13} = 6 \pm 7.$$

Atunci sistemul (1) devine:

$$(2) \quad \begin{cases} p + q = 13 \\ pq = 78 \end{cases} \quad \text{și} \quad (3) \quad \begin{cases} p + q = -1 \\ pq = -6. \end{cases}$$

Valorile lui p, q care satisfac sistemul (2) și (3) sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor:

$$z^2 - 13z + 78 = 0 \quad \text{și} \quad z^2 + z - 6 = 0,$$

care rezolvate ne dau:

$$z = \frac{13 \pm i\sqrt{143}}{2}, \quad \text{și} \quad 2 = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Deci:

$$\begin{cases} p = \dfrac{13 + i\sqrt{143}}{2} \\ q = \dfrac{13 - i\sqrt{143}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} p = \dfrac{13 - i\sqrt{143}}{2} \\ q = \dfrac{13 + i\sqrt{143}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 2 \\ q = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} p = -3 \\ q = 2. \end{cases}$$

Ecuațiile cerute sunt deci:

$$x^2 + \frac{13 + i\sqrt{143}}{2} x + \frac{13 - i\sqrt{143}}{2} = 0$$

$$x^2 + \frac{13 - i\sqrt{143}}{2} x + \frac{13 + i\sqrt{143}}{2} = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

Soluțiuni bune date de d-nii: *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Berdan C.* [Bârlad], *Blasko Beatrix* [Lugoj], *Botea C. Nicolae* [lic. Cantemir, București], *Căldăraru Leon* [București], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iași] *Eleomir, Florea C. Alexandru* [lic. Internat, Iași], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Grigore I. V.* [lic. Tg.-Jiu], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *Ionescu V. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Ionescu V. Nicu* [lic. Pitești], *Ioniță M. Ioan* [sublot. de Artilerie], *Marcovici H.* [lic. Botoșani], *Neumann Maria* [Lugoj], *Nicolau G. C.* [lic. R.-Sărat], *Podeanu P. Aurel* [lic. Pitești], *Popa Ilie* [lic. Internat, Iași], *Râpeanu Virgil* [lic. Internat,

Iaşi], *Şerban I. Tib.* [lic. Zărneşti], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spârchez Zeno* [lic. Braşov], *Stamatiu I. Mihail* [Piteşti], *Ştefănescu Emil* [Bucureşti], *Stoica N. Aurel* [Bucureşti], *Tărăbuţă C. Paul* [Bucureşti], *Tăraş Vasile* [lic. Braşov], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti] şi *Vlădea Ioan.*

Soluţii parţiale date de d-nii: *Băncilă Mircea* [lic. Braşov], *Bercovici Sigmund* [lic. Piteşti], *Botez Mihail Braeşter I. Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Cogan Alter Leo* [lic. Chişinău], *Constantinescu C. Marius* [lic. Slatina], *Costăchescu N. Ionel* [lic. Brăila], *Curcubată Dionisie* [lic. Braşov], *Dângă S. Vlad* [lic. Orhei], *Diaconescu V. Teodor* [lic. Caracal], *Drăghici Matei* [lic. Braşov], *Florescu M. Octuvian* [lic. Caracal], *Frătici I.* [Şc. Polit. Timişoara], *Gârleşteanu Mihail* [Şc. Polit. Timişoara], *Gherbanowsky F. Nicolae* [lic. Orhei], *Golcea Cornel* [student], *Ieremia Petru* [lic. Timişoara], *C-tin Th. Ionescu Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Iscovici Paul* [lic. Piteşti], *Lepădatu I. V., Manafu Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Milner I., Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Musta Şt.* [Cluj], *Podeanu Aurel* [lic. Piteşti], *Pop Iulian* [Cluj], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [Şc. Polit. Bucureşti], *Roşu Al.* [lic. M-rea Dealu], *Rusanda Gheorghe* [lic. Arad], *Scripcă Laur* [lic. Naţional, Iaşi], *Spacu Gh. Petru, Tunaru R. Traian* [lic. Craiova], *Vasiliu N. Şt.* [Iaşi] şi *Wetter Anna* [lic. Câmpulung, Bucovina].

402*. — *Pe un plan înclinat la 30° se găseşte o greutate* G_1, *legată cu un fir trecut la capăt pe un scripete şi de fir atârnă greutatea* $G_2 = \frac{G_1}{2}$ *având astfel echilibru. Dacă sistemul de două greutăţi e în mişcare uniformă cu viteza* v *şi avem o forţă de frecare* F_1 *pe planul înclinat pentru* G_1, *să se afle timpul când se va opri.*

C. TEODORESCU

Din cauza frecării F_1, mişcarea sistemului este uniform întârziată. Acceleraţia este constantă şi egală cu:

$$a = \frac{F_1}{m},$$

m fiind massa, în care intră massele celor două greutăţi G_1 şi G_2, care sunt în raportul cunoscut.

$$m = m_1 + m_2 = 3\,m_1$$

deci
$$a = \frac{F_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\,F_1}{3\,m_1}$$

Spaţiul parcurs de sistem este dat de legea mişcării uniform întârziate care este:

$$S = \frac{1}{2}\,a\,t^2.$$

Pentru a afla spaţiul scrim principiul fundamental cunoscut al dinamicei că lucrul mecanic produs de forţa F_1 este egal cu forţa vie a sistemului. Avem deci:

$$F_1\,s = \sum \frac{m\,v^2}{2} = \frac{m_1\,v_1^2}{2} + \frac{m_2\,v_2^2}{2}$$

ori cum: $v_1 = v_2 = v$ şi $m_1 = 2\,m_2$ avem:

$$F_1\,s = \frac{3\,m_1\,v^2}{4} = \frac{1}{2}\,a\,t^2\,F_1,$$

înlocuind pe a cu valoarea lui şi scoţând pe t din această relaţie avem:

$$t = \frac{3\,m_1\,v}{2\,F_1}.$$

După cum se ştie însă forţa de frecare depinde de componenta normală a greutăţii G_1 adică:

$$F_1 = f\,.\,G_1 \cos\alpha,$$

în care f este coeficientul de frecare. De asemenea:

$$m_1 = \frac{G_1}{g},$$

aşa că:

$$t = \frac{3}{2\,g}\,\frac{v}{f\cos\alpha}.$$

şi deci timpul de oprire nu depinde de mărimea greutăţilor, ci numai de viteza iniţială şi de frecare.

Pentru viteza $v = 20^{m}/_{sec}$ şi $\varphi = 0{,}49$ care ar corespunde unor greutăţi de forţă care alunecă pe un plan înclinat din lemn avem:

$$t = \frac{3}{2 \times 9{,}81}\,.\,\frac{20}{0{,}49 \times 0{,}5} = 12{,}4 \text{ sec.}$$

Au rezolvat bine problema: *Blasko Beatrix* (Lugoj) şi *Ern Serghei* (Şc. p. t. t., Timişoara).

Soluţii necomplete s'au primit dela: *Botea Nicolae, Popovici Th. Ion.*

PROBLEME PROPUSE

420. — După un număr de două cifre se scrie dublul său, iar apoi triplul acestuia din urmă și se formează un patrat perfect de șase cifre. Care-i acel patrat?

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

421 — O coloană a cărei lungime este d km., merge cu v km. pe oră pentru a ajunge la un punct oarecare A. In ce moment un călăreț care merge la urma coloanei să-și schimbe viteza, pornind cu v' km. pe oră, pentru ca să ajungă într'un punct B situat pe aceiași direcție cu A și mai apropiat decât acesta cu a km., înainte cu $\frac{1}{v}$ ore, ca vârful coloanei să fi ajuns în A.

SUBLOCOT. M. I. IONITA

422. — Să se construiască un trapez isoscel, fiind cunoscută mărimea AB a unei baze, mărimea laturei neparalele AC și știind că există un punct O egal depărtat de toate laturile.

P. TROFINOV

423. — Să se afle locul geometric al proecțiunii ortocentrului unui triunghiu ABC pe mediana corespunzătoare vârfului A, știind că punctele B și C sunt fixe și că suma patratelor medianelor triunghiului e constantă.

R. B. POPA-RADULET

424. — Se dau două cercuri O și O′ tangente interioare cu razele R și $\frac{R}{4}$. Cercul cel mic O′ rostogolindu-se pe cercul O, fie M și M_1 punctele de contact ale cercurilor în două poziții diferite și fie A și A′ punctele unde razele OM și OM_1 taie iarăși cercurile O′. Dreapta care unește punctul A′ cu M′, noua poziție a punctului M socotit fix pe cercul O′ în rostogolire, taie dreapta OM în punctul B.

Să se arate că lungimea dreptei A′B este constantă oricare ar fi poziționea cercului O′ în rostogolire.

GH. CONSTANTINESCU

425. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{ayz+bxz+cxy}=d \\ \dfrac{xyt}{ayt+bxt+dxy}=c \\ \dfrac{xzt}{azt+cxt+dxz}=b \\ \dfrac{yzt}{bzt+cyt+dyz}=a. \end{cases}$$

SUBLOCOT. I. N. GEORGESCU-VAL

426. — Să se stabilească identitatea:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & 1 \\ \beta & b & 1 \\ \gamma & c & 1 \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a^2 & \alpha & 1 \\ b^2 & \beta & 1 \\ c^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} s_1 + 3 \begin{vmatrix} a^2 & a & \alpha \\ b^2 & b & \beta \\ c^2 & c & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(a-b)(a-c)(b-c),$$

unde: $s_1 = a+b+c$, $s_2 = a^2+b^2+c^2$.

V. ALACI

427. — Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{(\sin\alpha.\cos\alpha)^2+(\operatorname{sh}\beta.\operatorname{ch}\beta)^2}{\left[(\sin\alpha.\operatorname{ch}\beta)^2+(\cos\alpha\operatorname{sh}\beta)^2\right]\left[(\sin\alpha.\operatorname{sh}\beta)^2+(\cos\alpha.\operatorname{ch}\beta)^2\right]}=1$$

V. VALCOVICI

428. — Există o infinitate de triunghiuri în care are loc relația:

$$2\sin A\sin B=\cos C.$$

1) Ce condițiune trebue să îndeplinească acele triunghiuri?

2) Să se rezolve un astfel de triunghiu cunoscând două lature.

ION PROTOPOPESCU

429. — a, b, c r fiind laturile și raza cercului înscris într'un triunghiu, să se arate că:

$$\frac{a+b}{ab(a+b-c)}+\frac{b+c}{bc(b+c-a)}+\frac{c+a}{ca(c+a-b)}=\frac{1}{2r^2}$$

EMIL ȘTEFANESCU

TABLA DE MATERII

ARTICOLE

V. Alaci	O clasă de expresiuni nedeterminate	4
Dili C. Schileru	Două probleme de analitică .	35
V. Alaci	Câteva formule de însumare	51
T. Popovici	Relaţiuni între unghiurile unui triunghiu	67
V. Alaci	Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume	83
	Concurs	90
V. Vâlcovici	Regimul de lucru maxim la banda hidraulică	115
Al. V. Niculescu	O problemă de geometrie cu priviri asupra conicelor . .	116
V. Alaci	Identităţi raţionale	132
V. Vâlcovici	Mişcarea unui punct sub acţiunea unor forţe elastice . .	147
N. Abramescu	Asupra discuţiunii rădăcinelor unei ecuaţii de gradul al doilea	163
Dili C. Schileru	Teorema lui Leibnitz şi Lagrange	179

NOTE MATEMATICE

Căp. Gr. Zapan	Calculul rapid al patratelor numerilor terminate cu 5 . .	9
Dili C. Schileru	Calculul lungimei unei ceviene	9
Samoilă Dum.	Asupra problemei 288 . . .	25
Stoenescu Al. I.	Asupra Notei 67, din G. M. XXVIII	26
Al. Niculescu	Asupra triunghiului în care avem $2a = b + c$	37
Dili C. Schileru	Asupra a doi vectori	37
Lt.-Col. Gh. Buicliu	Discuţia ecuaţiei bipatrată . .	53
A. Stambuleanu	Încă două metode pentru aflarea punctului de aplicaţie a rezultantei a două forţe paralele	53
Căp. I. Linteş	Asupra problemei 330 . . .	69
David Georghe	Transformarea formulei combinărilor	69
V. Alaci	Asupra unor teoreme de maxim şi minim	88
Remus B. Răduleţ	Asupra unor însumări trigonometrice	102
L. Weiss	Asupra unor poligoane inscriptibile	117
Popovici C.	Asupra problemei 320	135
A. Stoica	Asupra problemei 167 . . .	135
Dili C. Schileru	Generalizarea problemei 16 din Culegere de probleme de mecanică	149
Berdan B.	Insumări	167
V. Alaci	O însumare trigonometrică .	181

BIBLIOGRAFIE

Societatea Română de ştiinţe 10, 136
Gazeta Matematică 10 27, 37, 55, 72, 89, 103, 118, 136, ... 149, 168, 181
Jurnal Matematic 10, 11, 27, 37, 55, 72
A. Angelescu. Sur certaines équations différentielles linéaires 11
„ Sur une proposition de Stieltjes . . 11
„ Sur les fonctions génératrices des polynomes d'Hermite 11
P. Sergesco. Extensions aux noyaux symétrisables des théoremes de Weyl 11
Foaia Matematică 17, 55, 72, 89, 118, 136, 149, 168, 181
Anuarul Soc. Matematică Bârlădeană 27
Buletinul de matematică pură şi aplicată 55
P. Sergesco. Sur quelques inégalités de M. Landau 118
Viaţa Şcolară 149
Exerciţii de mecanică (E. Abasohn) 168

CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politechnică din Timişoara

Examen de geometrie analitică, 19 Martie 1924 . . 26
Examen de fine de an, Iunie 1924 70
Examenul de admitere în anul I, Oct. 1924 . . 117
Examen de fine de an, Oct. 1924 136
Geometrie analitică, 14 Ian 1925 181

PROBLEME PROPUSE

Numărul de ordine al problemei în *cifre cursive*, primul număr următor indică pagina unde a fost propusă în anul respectiv, al doilea număr indică pagina din acest volum unde a fost rezolvată, N indică problemele nerezolvate încă.

DIN ANUL I

42, 94, N;
50, 110, N;
54, 126, N;
70, 142, N;
76, 158, N;
81, 174, N;
82, 174, N;
88, 174, N;
91, 187, N;
92, 187, N;
99, 187, N;
100, 187, N:

DIN ANUL II

114, 30, N;
121, 30, N;
125, 46, N;
131, 62, N;
133, 62, N;
140, 62, N:
141, 62, N:
142, 77, N;
150, 78, N;
154, 78, N;
156, 94, N;
157, 94, N;
160, 94, 118 IV;
161, 94, N;
162, 94, N;
163, 94, N;
164, 94, N;
165, 94, N;
166, 94, N;
168, 110, N;
169, 110, N;
170, 110, N;
171, 110, N;
172, 110, N;
173, 110, N;
174, 110, N;
175, 110, N;
176, 126, N;
178, 126, N;
180, 126, N;
182, 126, N;
184, 162, N;
185, 126, N;
186, 142, N;
187, 142, N;
191, 142, N;
194, 142, N;
195, 142, N;
197, 158, N;
198, 158, N;
199, 158, N;
205, 174, N;
206, 174, N;
207, 174, N;
208, 174, N;
212, 174, N;
213, 174, N:
214, 185, N;
215, 185, 119 IV;
216, 185, 120 IV;
217, 185, N:
218, 185, N;
219, 185, N:

DIN ANUL III

221, 14, 121 IV și 136 IV;
222, 14, 38 IV;
223, 14, 121 IV;
227, 14, 137 IV:
230, 14, N;
232, 30, 138 IV;
233. 30, N;
234, 30, 138 IV;
235, 30, N;
237, 30, 39 IV;
243, 46, N;
244, 46, N;
245, 46, N;
246, 46, 40 IV;
247, 46, 55 IV;
248, 46, N;
249, 46, 27 IV;
251, 62, 42 IV;
252, 62, 42 IV;
253, 62, N;
255, 62, N;
256, 62, N;
259, 62, N;
262, 78, 124 IV;
263, 78, 103 IV;
264, 78, N;
265, 78, N;
267, 78, N;
268, 78, 57 IV;
269, 94, 139 IV;
270, 94, 11 IV;
272, 94, 150 IV;
274, 94, 43 IV;
275, 94, N;
276, 94, N;
277, 110, N;
278, 110, 150 IV;
279, 110, N;
280, 110, N;
281, 110, 28 IV;
282, 110, 93 IV;
283, 110, 105 IV;
284, 110, 73 IV;
285, 126, 107 IV;
286, 126, 11 IV;
287, 126, 58 IV;
288, 126, 12 IV;
289, 126, N;
290, 126, N;
291, 126, N;
292, 126, 29 IV;
293, 142, 74 IV;
294, 142, N;
295, 142, 140 IV;
296, 142, N;
297, 142, 74 IV;
298, 142, 91 IV;
299, 142, N;
300, 142, 108 IV;
301, 142, 141 IV;
302, 142, 76 IV;
303, 158, 123 IV;
304, 158, N;
305, 158, N;
306, 158, 108 IV;
307, 158, N;
308, 158, 58 IV;
309, 174, 59 IV;
310, 174, N;
311, 174, 60 IV;
312, 174, 61 IV;
313, 174, N;
314, 174, N;
315, 174, N;
316, 174, 151 IV;
317, 174, N;
318, 185, N;
319, 185, N;
320, 185, 77 IV;
321, 185, 151 IV;
322, 185. 125 IV;
323, 185, N;
324, 185, 109 IV;
325, 185, N;
326, 185, N;

DIN ANUL IV

327, 14, 152;
328, 14, N;
329, 14, N;
330, 14, 45;
331, 14, N;
332, 14, 45;
333, 14, 153;
334, 14, N;
335, 14, N;
336, 14, N;
337, 30, N;
338, 30, N;
339, 30, 154;
340, 30, N;
341, 30, N;
342, 30, N;

343, 30, N;
344, 30, N;
345, 30, N;
346, 46, N;
347, 46, N;
348, 46, N;
349, 46, 155;
350, 46, 168;
351, 46, N;
352, 62, N;
353, 62, N;
354, 62, N;
355, 62, 156;
356, 62, 157;
357, 62, N;
358, 62, N;
359, 62, N;
360, 78, 183;
361, 78, N;
362, 78, 169;
363, 78, 171;
364, 78, 172;
365, 78, 184;
366, 78, 185;
367, 78, 185;
368, 78, 186;
369, 94, N;
370, 94, 187;
371, 94, 173;
372, 94, N;
373, 94 și 142, 188;
374, 94, N;
375, 94, 189;
376, 94, N;
377, 94, N;
378, 110, N;
379, 110, N;
380, 110, N;
381, 110, N;
382, 110, N;
383, 110, N;
384, 110, N;
385, 110, N;
386, 126, N;
387, 126, N;
388, 126, N;
389, 126, N:
390, 126, N;
391, 126, N;
392, 126, N;
393, 126, N;
394, 126, N;
395, 142, N;
396, 142, N;
397, 142, N;
398, 142, N;
399, 142, N;
400, 142, N;
401, 142, N;
402, 142, 190;
403, 158, N;
404, 158, N;
405, 158, N;
406, 158, N;
407, 158, N;
408, 158, N;
409, 158, N;
410, 158, N;
411, 158, N;
412, 174, N;
413, 174, N;
414, 174, N;
415, 174, N;
416, 174, N;
417, 174, N;
418, 174, N;
419, 174, N;
420, 191, N;
421, 191, N;
422, 191, N;
423, 191, N;
424, 191, N;
425, 191, N;
426, 191, N;
427, 191, N;

TABLOUL NUMELOR

Abason E., 2, 27, 55, 168.
Abramescu N., 2, 55, 103, 136, 143, 159, 163, 174, 175.
Adam Eugen, 170, 172.
Adam I. Mircea, 56, 121, 122, 137, 138.
Adam I. Radu, 46, 90, 124.
Adamescu M., 2.
Agapescu M. N., 12, 28, 57, 107, 154, 170, 172, 187.
Alaci Valeriu, 2, 3, 4, 11. 14, 18, 19, 30, 34, 40, 46, 50, 51, 62, 66, 77, 78, 82, 83, 89, 90, 94, 98, 99, 102, 108, 110, 114, 126, 130, 131, 140, 142, 146, 153, 158, 162, 172, 174, 182, 191.
Alboi Nistor, 73.
Alexandrescu El , 2.
Alexandrescu Mihai, 119.
Alexandrescu Nic., 13, 73, 104, 108, 122.
Alexandrescu V., 36.
Andrieşescu Gh., 13, 27, 107.
Angelescu A., 2, 10, 11, 72, 182.
Angelescu Dim., 29.
Angelescu N. Traian, 11, 12, 13, 28, 39, 43, 45, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 92, 104, 105, 107, 108, 109, 121, 122, 124, 126, 138, 139, 141, 151, 154.
Anghel D. Radu, 92.
Angheluţă Th., 2, 55, 136, 149.
Antistescu N., 185.
Antoniu S., 58, 107.
Apăteanu Camil, 55, 73, 77, 92, 108, 151.
Aposteanu V., 28, 171.
Apostol Carol, 172, 185.
Arcadian N., 43, 73, 137.
Ardelea Radu, 15, 75, 77, 116, 124, 153, 155, 156, 172.
Arghir Iancu, 2.
Atanasiu I. D-tru, 45, 59, 73, 76, 90, 108, 122, 139, 141.
Avram Herman, 45, 124, 125.

Babeş Alexandru, 187.
Bădulescu Vasile, 114, 130, 146.
Balaban Gh., 2.
Balaban N., 2.
Balasz D., 2.
Bălean Gh., 11, 43, 45, 57, 58, 73, 90, 104, 107, 122, 124, 137, 139.
Bănărescu M., 2, 15.
Băncilă Mircea, 46, 170, 172, 189.
Banciu C., 2.
Barbalatt, 27, 72, 89.
Bărbulescu Gh., 46.
Bârglăzan A., 11, 12, 13, 28, 39, 43, 44, 55, 57, 73, 74, 76, 90, 91, 104, 107, 108, 119, 122, 138, 141, 150.
Bazacov St. G., 91.
Barbu A., 12, 57, 107.
Baron C., 2.
Başta Gh., 12, 45, 57, 107.
Beju O. Tr., 15, 28, 29, 42, 46, 55, 57, 59, 60, 61, 73, 74, 76, 77, 90, 93, 107, 108, 109, 122, 124, 137, 141, 151, 156, 168, 170, 171, 172, 185, 186.
Beldie N. D-tru, 39, 43, 45, 46, 55, 57, 61, 63, 73, 75, 76, 77, 78, 90, 93, 94, 107, 108, 109, 122, 124, 137, 139, 141, 150, 151, 152, 154, 155, 170, 171, 172, 183, 185, 186, 187, 189.
Berardo B., 29, 45, 46, 59, 61, 73, 78, 109, 122, 124, 126, 141, 154, 170, 172, 186, 187.
Bercovici E., 11, 12, 28, 29, 44, 55, 57, 59, 73, 74, 75, 76, 92, 107, 108, 109, 122, 124, 141.
Bercovici S., 8, 57, 122, 139, 187, 190.
Berdan C., 11, 12, 13, 29, 39, 42, 44, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 73, 74, 75, 76, 90, 91, 92, 104, 105, 108, 109, 119, 120, 122, 124, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 150, 152, 153, 156, 159, 168, 169, 172, 173, 174, 187, 188, 189.
Beşchea Nic., 12, 45, 46, 58, 61, 107, 170, 171, 172, 183, 187.
Blasian V., 2.
Blasco Beatrix, 59, 60, 61, 109, 124, 151, 174, 186, 188, 189.
Bleiweiss P., 156, 186.
Blumenfeld D., 42, 55, 60, 61, 73, 76, 107, 108, 129, 139, 151, 187.
Bobârnac M., 42, 56, 108, 119, 122, 137, 139.
Bocancea Gh., 28, 60, 73, 75, 124, 151.
Bogdan Mihai, 156.
Boian R., 107.
Boju Rosetel, 15 43, 46, 60, 73, 74, 75, 77, 107, 108, 109, 141, 151, 154.
Bolgiu O., 42, 57, 75, 90.
Bossie V., 60, 61, 77, 154.
Botea G. N., 11, 12, 42, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 73, 74, 75, 77, 90, 92, 107, 108, 109, 110, 121, 122, 124, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 159, 170, 171, 172, 173, 183, 185, 186, 187, 190.
Botez M., 2.
Botez St. M., 12, 44, 45, 124, 170, 171, 172, 183, 190.
Botiş Virgil, 46, 55, 59, 75, 109, 119, 122, 141, 154,
Brădeţeanu C. Cornel, 57, 60, 74, 124, 138. 139, 173.
Braeşter O., 15, 28, 42, 57, 60, 63, 74, 78, 107, 109, 121, 124, 138, 140, 141, 153, 154, 159, 170, 171, 172, 174, 183, 185, 186, 187, 190.
Brăescu C., 119.
Brăileanu Marin, 187.
Bratu Gh., 2.
Brodschii I., 27, 170.
Brudo N., 107.
Brüll L., 43, 59, 74, 75, 107, 124, 139, 156.
Budişteanu Al., 150, 151, 172, 186.
Bugianu O., Maior, 55, 140.
Buicliu Gh., Lt.-Col., 2, 25, 27, 30, 36, 53, 90, 94, 119, 138, 142, 158, 174, 191.
Burghele C., 34.
Butu I., 107.

Caftangioglu C. C., 46, 78, 172, 186.
Căldăraru L., 45, 46, 59, 109, 156, 157, 159, 171, 173, 185, 186, 187, 189.
Callega M., 129.
Calmanovici Savu, 12, 13, 29, 39, 44, 57, 59, 73. 74, 75, 93, 107, 108, 122, 124, 139, 141.
Cândea C., 2.
Cândea I., 55, 75, 90, 104, 124.
Cantacuzino I. I., 12 13, 27, 28, 42, 57, 107, 123
Caraman E., 2.
Cârdei V., 2.
Cârstean Tr., 46, 77, 154.
Cazacincu V., 122, 137.
Chinie M., 171, 172, 187.
Chivulescu C., 2.

Ciorănescu I. C., 12, 13, 15, 27, 39, 43, 44, 45, 4 , 55, 57, 58, 60, 61, 73, 74, 75, 77, 90, 92, 104, 107, 108, 109, 121, 122, 123, 124, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 150, 151, 155, 158, 170, 171, 172, 173, 183, 185, 186, 189, 190.
Ciufu P. P., 46.
Ciută G., 11, 12, 13, 44, 57, 59, 61, 73, 75, 77, 90, 92, 93, 104, 122, 137.
Cizmărescu N., 2.
Cocorandu M., 13, 28, 39, 43, 55, 57, 73, 90, 104, 107, 122, 124, 139, 170.
Colero A., 74.
Coman Aug., 2, 12, 90.
Coman Onoriu 152.
Comănescu Bălteni Al., 12, 13, 28, 44, 55, 60, 74, 75, 104, 107, 122, 124, 126, 139, 140, 154, 155, 168, 170, 171, 172, 183, 185, 187.
Costăchescu N. Ion, 73, 159, 172, 186, 187, 190.
Constantinescu D. D., 156, 169, 171, 172, 183, 186.
Constantinescu Ion, 29, 42, 46, 57, 59, 63, 74, 76, 92, 93, 104, 108, 109, 122, 124, 141, 150, 151.
Constantinescu M., 171, 172, 173, 189.
Constantinescu N. N., 28, 42, 73, 107, 109, 124.
Constantinescu Th., 170, 172.
Constantinescu Venus, 78, 109, 126.
Cormaschi I, 45, 46, 63, 78, 110, 159.
Corneanu P., 2.
Corşoreanu Gh. Gh., 39, 55, 60, 61, 75, 77, 78, 90, 108, 109, 110, 122, 124, 126, 139, 141, 151, 152, 155.
Coşereanu I., 40, 41, 55, 103, 122, 137.
Coşniţă V., 11, 45, 46, 59, 77, 108, 110, 124, 138, 139. 155, 174.
Costăchescu Gh., 75.
Costăchescu M. I., 73, 159, 172.
Cărciun G. Fl., 124.
Crăiniceanu Gh., 141.
Crasoveanu V., 46, 154.
Creţoiu A,, 11, 40, 41, 45, 57, 73, 138, 139.
Cristea A., 75, 76, 77, 78, 108, 152.
Cristescu I., 2, 15.
Cristescu Virgil, 119.
Critz Mendel, 11, 12, 15, 46, 57, 75, 76, 77, 78, 93, 107, 108, 110, 112, 126, 137 141, 151, 169, 172, 173, 186.
Cruşovean P. I., 107.
Curcubată D., 170, 171, 172, 183, 185, 187, 190.
Curcubată I., 46.

Damşescu A., 29, 43, 107, 110.
Danciu A., 44.
Dângă Gh., 154, 173, 190.
David Gh., 15, 29, 45, 46, 58, 60, 70, 73, 109 124.
David I. I., 42, 46, 57, 59, 63, 76, 93, 104, 108, 109, 110, 122, 142, 151.
Davidson M., 14, 43, 90, 104, 122.
Demetrescu Gh., 57.
Derigault A., 2.
Diaconescu V. D-tru, 172.
Diaconescu N., 2.
Diaconescu V. Th., 152, 172, 185, 187, 190.
Diaconovici R., 57.
Diaconu Gh., 12, 14, 28, 57, 60, 74, 107, 121, 124, 139.
Diaconu B. M., 11, 13, 27, 58, 60, 74, 75, 107, 124, 170, 171, 187.
Dimitriu P., 171.
Dobre V., 42, 55, 122.
Dordea Tr., 55.
Dorneanu V., 93, 94, 107, 110, 151, 170, 172, 173, 186, 187, 188, 189.
Dospinoiu N., 57, 107.
Dragalina C. Lt.-Col., 114, 130, 146.
Drăgan Gh., 170, 171, 172,
Drăghiceanu M., 153, 173.
Drăghici Aur., 125, 172, 186, 190.
Dragomir Ch. Eug., 13, 46, 107.
Dragomir N. I., 57.
Dragomirescu Ed., 119.
Drogeanu N., 45, 46, 57, 58, 90, 110, 186.
Dugan Victor, 170, 171, 187.
Dumitrescu Al., 12, 28, 57, 125.
Dumitrescu I. G., 2.
Dumitrescu I. Gh., 168.
Dumitrescu Gh., 2.
Dumitrescu Ion, 107.
Dumitrescu Marin, 11, 15, 29, 44, 55, 57, 59, 61, 73, 75, 77, 107, 108, 122, 124, 139, 142, 151.
Dumitrescu A. Mihai, 46, 170, 172, 187,
Dumitrescu Mihai, 13, 27, 57, 60, 107.
Dumitrescu C. Nic., 13, 57, 78, 107, 122, 124.
Dumitrescu N. Savu, 12, 107, 125.
Dumitrescu Sile, 60, 77,
Dumitriu Arad I., 2, 31, 46, 63, 79, 142.
Duţulescu M., 2.

Ebner A., 45, 59, 136.
Enulescu Ovid, 58, 122.
Epure T. Şt., 39, 40, 43, 44, 58, 59, 63, 73, 75, 78, 104, 108, 110, 122, 126, 139, 142, 151.
Ern Serghei, 190.

Fântâneanu I., 108.
Feneşan I., 60, 74, 125.
Fezi Gh. 46, 172.
Feldştein Eva, 107.
Filipescu Eug., 151.
Filipescu Em. Gh., 27. 136.
Flichstein I., 12, 28, 29, 42, 45, 46, 57, 58, 61, 73, 74, 78, 90, 92, 107, 110, 125, 139, 140, 150, 153.
Florea C. Alex., 63, 73. 76, 77, 78, 93, 107, 109, 110, 138, 139, 151, 152, 154, 155, 156, 183, 185, 186, 187, 189.
Florcscu M. Oct., 57, 63, 110, 124, 125, 170, 183, 185, 187, 190.
Florescu Oprea, 68. 169.
Florescu P. M., 2.
Fraer M., 129.
Fratici I.. 59, 61. 75, 154, 155, 159, 170, 171, 172, 173, 185, 187, 190.
Frumuşelu Gh., 172.

Gabrielescu Vasile, 13, 43, 44, 73, 74, 77, 90, 93, 104, 105, 107, 109, 122, 125, 139, 142, 151, 159.
Galescu T., 28, 58, 125.
Gârleşteanu M., 11, 27, 60, 73, 75, 77, 78, 107, 108, 110, 122, 142, 151, 156, 159, 171, 173, 183, 185, 186, 187, 190.
Gataiantu B., 15, 57, 60, 74, 107, 124, 125, 171, 172, 185, 187.
Georgescu I. Chiriac, 58, 58, 61,
Georgescu P. Const.. 39, 122, 137.
Georgescu Er. Florin, 15, 139.
Georgescu D., 2.
Georgescu C. I., 11, 14, 45 46, 62, 73, 76, 78, 90, 104, 107, 122, 124, 125, 139, 155, 168, 170, 171, 172, 183, 184, 185, 187.
Georgescu N. I. Val., 12, 15, 29, 39, 40, 44, 45, 57, 59, 60, 61, 73, 74, 76, 77, 78, 91, 92, 93, 105, 107, 108, 109, 119, 120, 121, 122, 124, 125, 136, 137, 139, 150, 151, 152, 154, 155, 170, 172, 183, 185, 186, 187, 189, 191.
Georgescu M., 74.
Georgescu I. N., 72, 91.
Ghelber Mauriciu, 12, 45, 46, 60, 75. 77, 90, 94, 105, 107, 108, 110, 122, 124, 155, 170, 171, 185, 186, 188, 189,
Gheorghiu Adrian, 170, 172.
Gheorghiu C., 42, 43, 55, 90, 104, 122, 125, 139.
Gheorghiu Olga, 27.
Oheorghiu Olimpia, 29, 90, 107.
Gheorghiu Victor, 170, 186.
Gherbanovschi C. N., 46, 154, 172, 190,
Ghermănescu M., 2, 10, 14.
Gheţeanu T., 77,
Ghilezan Moise, 58, 107, 124.
Ghinicescu Gh., 73, 76, 77, 108, 109, 122, 151, 156, 172, 183, 186.
Ghiţescu V., 119, 138.
Giotta V., 90, 122, 137.
Gogan Alter, 187, 189.
Gogâlniceanu N., 122.
Goilav Cr. 119.
Golcea Cornel, 13, 74, 142, 187, 190.
Goldstein Marcel, 107, 108, 124.
Goldstein N., 42, 45, 46, 57, 60, 73, 74, 77, 78, 107, 110, 124, 126, 132, 153, 154, 155, 172, 183, 185, 187.
Golopenţia A., 15, 29, 46, 107.
Grabovschi E., 12, 57, 90, 107, 124, 125, 173.
Gradini Gh., 29, 44, 45, 46, 59, 60, 61, 73, 74, 78, 90, 104, 105, 107, 108, 109, 119, 124, 126, 151, 152, 153, 154, 170, 172, 183, 186.
Grigore T. Ion 171, 172.
Grigore Niculae, 171, 187.
Grigore T. V., 110, 126, 152, 170, 172, 186, 189.
Grigorescu L. I., 12, 13, 46, 57, 73, 74, 75, 77, 78, 90, 92, 107, 108, 109, 110, 122, 124, 139, 142, 150.
Grigorescu Pomp., 60, 124, 125.
Grofşoreanu I. Gh., 12, 13, 39, 42, 45, 46, 55, 57, 59, 60, 61, 73, 74, 75, 77, 78, 90, 92, 93, 107, 108, 110, 122, 124, 136, 141, 142, 151, 152, 154, 156, 170, 171, 172, 186.

Grubenman I. Gr. 170, 171, 172, 183.
Grünbaum Micu, 27, 37, 168, 181.
Gruneman Ionel, 187.
Gulian Emil, 15, 55, 57, 59, 73, 74, 107, 108, 122, 125.

Haimovici D. M., 11, 13, 107.
Haimovici Fischel, 107.
Hainer Samuel, 74, 124.
Harnagea I., 55, 122.
Hart Ernst, 119.
Hartular Gheorghe, 73
Herscovici Emil, 11, 12, 13, 28, 45, 46, 57, 59, 60, 61, 73, 74, 78, 108, 110, 124, 140, 151, 152, 154,.
Hîlmu V. V., 57.
Hirsch Ionel, 104, 107.
Höpital, 4, 19.
Horvat Pavel, 57, 124.
Hotăran Th., 29, 73, 107, 142, 150.
Hristea H., 2, 62.
Hristodorescu Nicolae, 125.
Hubert M., 2
Huzuneanu Gh., 153.

Iacob St. Eugen, 186, 187.
Iacob Filip, Lt.-Col., 14.
Ianculescu Oct., 46, 60, 73, 78, 93, 152, 172, 185, 186.
Ieremie Petru, 169, 171, 172, 173, 190.
Iliescu Ciorăneşti, 107.
Iliescu St. Dima, 12, 13, 29, 45, 57, 60, 73, 74, 75, 107, 110, 124, 125, 139, 151, 152, 155, 172, 185.
Iliescu D. Emilian, 43, 56, 90, 104, 119, 122.
Iliescu D. Grigore, 12, 13, 27, 57, 60, 75, 75, 90, 107, 124, 125.
Iliescu M., 107.
Iliescu Mircea, 170, 172.
Iliescu St. Petre, 12, 74, 75, 77, 108, 122.
Iliescu Th. Teodor, 12, 57, 74, 107, 122, 124, 125, 138, 140.
Iliescu St. Virgil, 60, 107, 125, 139, 172.
Iliovici C., 170, 171, 172, 183, 185.
Ioachimescu A. G., 4, 8, 25, 149.
Ionescu Angelo, 60, 73, 77, 108, 122, 124, 142, 151, 152, 170, 171, 172, 183, 186, 187, 189.
Ionescu Bujor Andrei, 124, 170, 171, 173, 183, 187.
Ionescu Bujor Const., 12, 13, 45, 46, 58, 60, 74, 75, 93, 107, 110, 121, 139, 155, 156, 170, 171, 172, 173, 183, 185, 187, 190.
Ionescu I. Brezuică, 137.
Ionescu K. C., 2.
Ionescu Carol, 90, 139, 169, 172, 183.
Ionescu Gh. Const., 60, 124, 125.
Ionescu V. D-tru, 44, 142, 170, 172, 189.
Ionescu I., 27.
Ionescu Gh. I., 58, 92, 107, 124.
Ionescu Lazăr, 169.
Ionescu Al. Mihai, 74, 75, 125.
Ionescu Nicu, 29, 93, 107, 154, 187, 189.
Ionescu Paul, 11, 13, 27, 28, 29, 42, 43, 44, 45, 46, 55, 57, 58 60, 73, 74, 75, 77, 78, 90, 92, 93, 94, 104, 107, 108, 109, 110, 121, 122, 123, 124, 125, 137, 138. 139, 140, 141, 142, 150, 151, 155. 170, 171, 172, 173, 183, 185, 186.
Ionică Ion, 46.
Ioniţă M. Ion, 62, 107, 158. 187, 189, 191.
Iorgu Avram, 154.
Iscovici Paul, 13, 46, 60, 78, 91, 170, 172, 185, 190.
Iulian Emil, 12.

Jean Victor, 142.
Jecu M. I., 2.
Jojea Nic., 12, 28, 39, 44, 46. 57, 73, 74, 75, 78, 93, 107, 108, 122, 124, 125, 139, 142, 171, 187.

Kassargian A., 39, 57, 107, 121. 124. 138.
Katz Isac, 107.
Katz Leon, 172, 187.
Katz Pincu, 12, 13 28, 29, 38, 39, 42, 43, 44, 55, 57, 58, 59, 73, 74, 75, 77, 90, 93, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 119, 122, 123, 124, 125, 138, 139, 140, 142.
Katz S., 57, 74, 107, 125, 140.
Kerdesz Paul, 12, 28, 78, 183.
Klein S., 119.
Kligher A., 45, 46, 78, 109, 122, 124.

Lalescu Tr., 2, 10, 29, 55, 125, 127, 143, 149, 159, 175.
Lăzărescu Fl. Şt., 76. 77, 122.
Lăzărescu M. Vasile, 29, 45, 58, 60. 63, 73, 74, 107, 108, 110, 125, 139, 151, 169.
Lelescu L., 122,
Leonida D., 15.
Leontescu Const., 27.
Lepădatu I. Victor, 56, 63, 73, 77, 78, 93, 104, 108, 122, 151, 152, 154, 155, 156, 172, 183, 185, 186, 187, 190.
Lindemberg Lionel, 15, 27, 46, 107, 124, 170, 171.
Linteş I. Căp., 2, 30, 69, 78, 89, 101, 107, 118, 136, 154, 183.
Liteanu Gh., 2.
Liuba C., 110.
Liuba Gh., 55, 92, 110, 151.
Lupan A., 2, 15.
Lupan M., 13, 61, 75, 110, 142.
Lupşa E., 122.

Macrineanu St., 120.
Magheru I. D., 175.
Manafu Vasile, 15, 29, 46, 57, 73, 75, 78, 90, 93, 107, 110, 122. 155, 159, 172, 173, 174, 190.
Manoil Adolf, 46, 91, 151, 170, 172, 186, 187.
Manoil, Eug., Maior, 169, 170.
Manughevici C., 2.
Marcon H., 170.
Marcovici M., 187, 189.
Mardan D., 2, 15.
Marinescu Ion 12, 17, 28, 29, 39, 42, 46. 55, 57, 60, 73, 78, 90, 107, 110, 122, 124, 137, 150, 151, 154, 155, 170, 171, 172, 186.
Marinescu Traian, 11, 29, 57, 59, 73, 74, 75, 76, 77, 91, 124, 125, 142.
Marineanu Toma, 12, 74, 75, 107.
Marian Solomon, 73, 74.
Marini Paul, 15, 75, 107, 125, 156, 171, 172.
Marius Maris, 152, 171, 183.
Marteniuc M., 17.
Mătăsaru D., 153.
Mateescu G. Vasile, 15, 124.
Mehlman Th., 42, 119, 122.
Miclescu Andrei, 39, 119, 121, 122, 137, 138.
Mihaescu D. D., 39, 76, 121.
Mihaly El., 2.
Mihăileanu C. Grigore, 110, 185, 187.
Mihăilescu Nic., 171.
Mihăilescu R., 11, 12, 13, 45, 46, 55, 57, 59, 60, 61, 63, 73, 76, 77, 78, 107, 108, 109, 110, 122, 124, 125, 142, 152, 153, 183, 185, 186.
Milculescu Gh. D., 12, 13, 27, 57, 74, 75, 107, 125.
Milner I., 47, 62, 63, 73, 78, 159, 170, 172, 186, 187, 190.
Mircea Pol., 107.
Mirescu Petre, 77, 108, 121.
Mironovici Virginia, 28, 42, 73, 90, 107, 124.
Mitescu D., 12, 45, 57, 58, 60, 74, 75, 90, 107, 121, 138, 139, 151.
Mititelu Gh., 45.
Mitran Grigore, 73, 108, 110, 142, 151
Miu M. Ion, 15, 46, 60, 63, 90, 107, 110, 124, 125, 153, 170, 172, 183, 185, 186. 187, 190.
Moaşa D., 173.
Moisil G., 10, 37.
Moroianu I. Alex., 39, 42, 57, 58, 73, 90, 99, 108, 122, 124, 125, 138, 139, 140, 142, 151.
Moşoiu Tr., 15.
Musta Şt., 39, 43, 45, 58, 73, 90, 104, 122, 139, 152, 169, 171, 172, 183. 184, 185, 186, 189.
Muzicescu N., 2.

Nan V., 15, 75, 141, 142.
Neacşu V., 74.
Nedelcu Gh. Ilie, 12, 60, 74, 124.
Nedelcu C., 46.
Negreţu Fl., 28, 29, 58, 90, 93, 107, 150.
Negroiu Pascu, 74, 75.
Neştian Gh., 122, 125, 139.
Nestor D. D., 170, 171, 172, 183.
Neumann Maria, 124, 152. 159, 174, 185, 186, 187, 188, 189.
Nichifor Gh., 3,
Nicolae R. St., 27.
Nicolau C-tin, 27, 29, 45, 46, 59, 60, 61, 73, 77, 78, 108, 110, 122, 142, 151, 152, 154, 172, 185, 186, 187, 189.
Nicolaescu P. I., 139.

Nicolau Pomp., 15.
Nicolau Th. A., 26, 118.
Nicolescu Angelo, 12, 57.
Nicolescu P. V., 12, 46, 60, 151.
Niculescu Alex., 11, 37, 46, 91, 116.
Niculescu Grig., 13, 72, 74, 107.
Niculescu Isaiia, 13, 45, 90, 107, 125.
Niculescu N., 72.
Niculescu Gh., 75.
Noaghea Gh., 3.
Novacu V., 152, 171, 183.

Oana I., 46, 107.
Obreja I., 45, 46, 61, 62, 78, 154.
Olaru T. Ene, 155, 171, 172.
Onicescu O, 74.
Oniţiu Fl., 13, 29, 107.
Oprescu I. Gh., 45, 46.
Oprişan E., 122.
Orăşanu Cezar., 3, 27.
Orăşanu Grig., 3.
Orbonaş I., 122, 141, 150.

Pamula A., 42, 44, 59, 60, 61, 74, 75, 90, 109, 124, 139, 140, 142, 157, 171, 183, 185, 186.
Panaitescu I. Al., 44, 91, 119, 122.
Pantazi G. D., 13, 28, 90, 107.
Partenie Iancu, 107.
Pârvulescu I. Titus, 73, 74, 107, 108, 124, 142, 150.
Pascu D., 46, 75, 107, 124, 142, 154.
Pascu W., 154, 170, 172, 187.
Patriciu A., 171.
Pătroianu I. Mihail, 12, 13, 27, 28, 39, 44, 55, 57, 58, 73, 74, 75, 78, 90, 92, 93, 104, 107, 108, 109, 110, 121, 122, 124, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151, 153.
Penenjechevici L. 118, 149.
Penţia A., 153, 156.
Percea V., 11, 13, 27, 43, 59, 60, 63, 75, 77, 78, 90, 93, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 122, 125, 126, 139, 142, 153.
Petrescu A., 3.
Petrescu A., 153.
Petrescu St. Dan, 45, 46, 61, 78, 170, 172, 187.
Petrescu N. D., 152, 159.
Petrescu P. Gh., 15, 90, 91, 104, 107, 122, 141, 142.
Petricoane M. Dr., 3.
Petrulian N., 44, 91, 119, 122.
Pietrariu V., 107, 142.
Piperiu M, 187.
Podariu A., 159.
Podeanu A., 78, 155, 159, 170, 171, 172, 173, 183, 185, 186, 187, 189, 190.
Polaczek Fr., 90, 125, 171, 173, 182, 186.
Pollak A., 119.
Pompei D., 136.
Popa Ion, 46.
Popa Ilie, 110, 171, 173, 187, 189.
Popa P. N., 39, 122, 137, 170, 172.
Popea Ovid, 73, 74, 105, 121, 122, 137.
Popeanu A., 119.
Popescu I. Al., 125.
Popescu Argetoaia N., 12, 75, 92, 107.
Popescu N. Corneliu, 12, 13, 28. 45, 57, 74, 91, 104, 107, 124, 125, 126, 139, 171, 172, 173, 183, 187, 190.
Popescu Epaminonda 59, 107, 124, 172, 186.
Popescu G. Florian, 12, 45, 57, 58, 60, 91, 107, 124, 139.
Popescu I Gr., 30, 39, 44, 91, 122, 125.
Popescu Iancu, 120.
Popescu Chr. Jean, 12, 29, 57, 74, 124, 125, 140, 172.
Popescu D. Marin, 12, 13, 23, 45, 58, 60, 73, 74, 77, 91, 93, 107, 108, 124, 125, 138, 139, 172, 186, 187.
Popescu N. N., 45, 107, 151, 172, 183.
Popescu Spirea, 76, 122, 172, 182.
Popescu Victor, 28, 107.
Popovici Gh. A. C., 39, 122.
Popovici Aur., 154, 155, 156, 170, 171, 172, 173, 184, 185, 186, 187.
Popovici C. C. 57 59, 60, 63, 73, 76, 77, 78, 91, 93, 104, 107, 108, 109, 110, 122, 125, 126, 135, 138, 139, 140, 151, 152, 154, 155, 156, 158, 159, 170, 171, 172, 173, 183, 185, 186, 187, 188, 190.
Popovici Chr. Jean, 12, 29, 57, 74, 124, 125, 140, 172, 186.
Popovici Th. I., 11, 12, 13, 27, 29, 39, 41, 43, 45, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 73, 74, 75, 77, 91, 93, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 119, 120, 122, 125, 126, 138, 139, 140, 142, 151, 152, 155, 156, 170, 171, 172, 174, 183, 184, 185, 187, 188, 190.
Popovici D. Puiu, 11, 29, 57, 91, 122, 125, 138.
Popovici Tib. 10, 11, 27, 37, 39, 40, 42, 67, 119, 120, 174.
Popp I. Emilian, 12, 13, 28, 39, 46, 55, 57, 58, 60, 74, 75, 78, 91, 93, 104, 107, 108, 109, 110, 121, 124, 137, 138, 139, 140, 142, 150, 151, 190.
Popp Iuliu, 46, 170, 172, 183.
Popper Erwin, 13, 46, 78, 107, 125.
Porumbaru I. I., 13, 91, 107, 169, 171,
Profiri N., 27, 55.
Propst I., 44, 57, 73, 91, 122, 124.
Protopopescu I., 3, 14, 30, 46, 62, 94, 142, 157, 158, 174, 175, 187.
Prundeanu I. D., 45, 46.
Puşcă Toma, 185.
Purcariu I., 3.
Purdilă C., 28, 57, 60, 74, 107, 110, 124, 125, 170, 171, 172, 185, 187.

Rabinovici S., 12, 58, 104, 122, 124, 125.
Radu Ilie, 28, 75.
Rădulescu P. Marin, 12, 28, 43, 45, 57, 75, 78, 91, 107, 110, 122, 124, 125, 139.
Rădulescu N., 186.
Rădulescu P. Stelian, 12, 13, 28, 43, 55, 57, 91, 107, 122, 125.
Rădulescu Titus, 12, 13, 27, 42, 57, 60, 74, 91, 104, 107, 122, 124, 137, 150.
Răduleţ B. Remus, 11, 12, 13, 28, 39, 42, 44, 57, 73, 75, 77, 91, 93, 103, 104, 107, 108, 119, 122, 126, 139, 142, 191.
Râmniceanu R., 45, 46, 76, 78, 107, 108, 110, 126, 151.
Răpeanu V., 185, 187, 189.
Râtan C., 46, 170, 171, 172.
Rătescu Maria, 63, 151.
Rauchbach Artur, 15, 29, 45, 46, 59, 61, 63, 73, 74, 75, 77, 78, 92, 107. 125, 126, 140, 172 183, 186.
Rauchbach Sidonia, 107, 125.
Răuţ C., 43.
Reichenman David, 107.
Restez P., 124.
Rigani Chr., 122.
Robinson C., 153.
Roibănescu C., 3
Ropcean I., 28, 75.
Roşca I. I., 110.
Roşu A., 73, 76, 78, 91, 93, 107, 110, 124, 153, 155, 159, 169, 171, 172, 173, 187, 190.
Rucăreanu N., 171, 172.
Rudich L., 107.
Rusescu C., 119.
Ruxanda Gh, 186, 187, 190.

Săbău Ortensia, 107, 121, 152.
Saegiu E., 3.
Samoilă D., 11, 25, 55, 59, 60, 63, 73, 109, 124, 151, 152.
Săvescu M., 91.
Schächter Ide Arie, 124, 185, 187.
Schileru C. Dili, 10, 30, 35, 37, 119 142, 179.
Schlesinger P., 61.
Scodreanu A., 129.
Scripcă Laur, 28, 46, 91, 107, 110, 122, 171, 172, 190,
Segărceanu N., 156, 171, 187.
Şeitan I., 46, 154.
Septilici Raul, 12, 57, 104, 119, 122, 125.
Şerban I. Tib, 29, 39, 43, 44, 46, 57, 60, 73, 75, 77, 78, 104, 107, 121, 122, 124, 125, 142, 154, 159, 171, 173, 183, 187, 189.
Şerbănescu N. I., 165.
Şerbănescu Mihail, 170, 171.
Şerbănescu Ovid, 45, 46, 61, 75, 91. 104.
Şerbănescu I. Virgil, 124, 150, 151.
Sergescu P., 3, 11, 89, 118, 136, 168.
Serghiev A. Ion, 12, 57, 58, 59, 61, 122, 124.
Sesserman A., 46, 124.
Severineanu C., 3, 15.
Silion Gh. Ion, 11, 13, 14, 29, 39, 42, 45, 46, 55, 57, 58, 59' 60, 62, 73, 75, 77, 78, 91, 92, 93, 104', 106, 107, 108, 109, 110, 119, 122, 124 125, 126, 138, 139, 140, 141, 142, 150, 152, 154, 155.
Silistrărianu C., 169, 173
Simionescu D. Gh., 11, 12, 13, 27, 29, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 55, 57, 58, 59, 60, 63, 73, 74, 75, 78, 91, 92, 93, 104, 107, 108, 109, 121, 122, 124, 125, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151, 152, 155, 157, 170, 171, 173, 183, 184, 185, 186, 187, 190
Simniceanu S., 3.
Singer B., 44.

Smighelschi O., 44, 73, 91, 93, 104.
Solacolu C. Șerban, 12, 13, 29, 45, 55, 57, 58, 73, 91, 107, 123.
Solomon Maria, 57.
Solomon Nicu, 27, 122.
Solomon Wilhelm, 72.
Soula I., 10,
Spacu Gh. P., 46, 73, 77, 108, 122, 137, 142, 151, 152, 171, 173, 183, 185, 186, 190.
Spârchez Zeon, 43, 46, 73, 75, 77, 78, 122, 124, 125, 142, 153, 154, 159, 170, 171, 173, 183, 187, 190.
Spineanu Cezar, 3.
Stacu Ion, 45, 122.
Staicu Irimie, 125, 142, 154, 170, 171, 173, 187.
Stamatescu I. Val., 11, 12, 13, 28, 57, 59, 60, 61, 73, 75, 77, 78, 91, 92, 107, 109, 110, 124, 126, 139, 142, 153, 154.
Stamatiu M., 11, 12, 29, 39, 43, 56, 57, 59, 73, 74, 75, 77, 91, 93, 107, 108, 109, 119, 120, 122, 124, 125, 137, 138, 142, 150, 173, 187, 190.
Stambuleanu Ad., 11, 12, 30, 44, 55, 57, 62, 73, 91, 104, 107, 125.
Stăncescu C., 3. 15.
Stanciu Grigore, 108.
Stănciulescu Dan, 30.
Stănciulescu A. Gh., 12, 39 57, 59, 73, 75, 77, 91, 107, 108, 109, 121, 124, 142, 173, 185, 187.
Stănculescu C-tin, 27, 39, 44, 46, 56, 73, 77, 78, 90, 104, 107, 108, 122, 124, 138, 139, 142.
Stănescu Aurel, 171, 187.
Stănescu D., 44, 91, 125, 139.
Stănescu A. Nic., 56, 57, 73, 77, 91, 104, 108, 124, 125, 138, 139, 151.
Stănescu T., 122, 155, 173, 183, 187.
Stănescu V., 173.
Ștefănescu C., 3.
Ștefănescu Emil, 11, 28, 29, 42, 44, 56, 57, 58, 59, 61, 73, 74, 78, 91, 93, 94, 104, 109, 110, 119, 121, 124, 125, 126, 137, 138, 139, 150, 152, 158, 159, 173, 174, 188, 190, 191.
Ștefani B., 39, 57, 124.
Ștefulescu I., 13, 120.
Ștefulescu I. Ghica, 46, 104, 107.
Stewart, 9.
Stoenescu I. Al., 11, 26, 119.
Stoenescu Gh., 12, 57.
Stoenescu I., 40, 41, 102, 108, 124, 142.
Stoian I. I., 46, 173.
Stoica Aurel, 27, 45, 46, 122, 124, 136, 138, 151, 156, 170, 172, 178, 183, 185, 186, 187, 190.
Stoicescu M. Gh., 3.
Stroescu I. Gh., 12, 45, 57, 74, 75, 91, 107, 125, 138, 139, 151, 172.
Șuselescu I., 12, 27, 57, 60, 73, 74, 75, 77, 91, 104, 107, 108, 110, 122, 124, 137, 150, 151, 153.

Tache C. Gh., 173.
Tănăsescu Marioara, 77.
Tănăsescu T., 55.
Tărăbuță Paul, 11, 12, 13, 28, 29, 39, 40, 42, 44, 56, 57, 59, 60, 61, 63, 74, 76, 77, 78, 91, 93, 104, 107, 108, 109, 110, 119, 120, 124, 125, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151, 152, 154, 155, 156, 157, 159, 169, 172, 173, 174, 183, 184, 185, 186, 187, 190.
Tăraș V., 12, 39, 42, 46, 56, 58, 59, 60, 73, 75, 78, 104, 107, 108, 110, 112, 122, 124, 125, 137, 151, 153, 155, 156, 157, 171, 172, 173, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 190.
Tauber A., 11, 27, 42, 44, 56, 57, 73, 78, 91, 120 122, 125, 138, 139, 142, 185.
Teodorescu C. Ing., 3, 18 31, 34, 47, 50. 66, 79, 82, 90, 98, 111, 114, 130, 142, 143, 146, 158, 159, 162, 175, 190,
Teodorescu Al. D., 11, 12, 13, 28, 29, 45, 46, 57, 59, 60, 61, 74, 75. 77, 78, 91, 93, 107, 108, 109, 110, 122, 124, 125, 126, 138, 139, 140, 142, 151, 152, 154.
Teodorescu Florin, 12, 58.
Teodorescu N. Oh., 75, 187.
Teodorescu St. I., 12, 29, 107.
Teodorescu C. M., 74.
Teodorescu N., 44, 45. 46, 58, 74, 107, 121, 122, 125, 152, 172, 173, 184, 190.
Teodorescu St. S., 13-
Teodosiu Arg., 3.
Terfeleag Olga, 12.
Thierrin G., 3.
Toma N., 13, 75, 151.
Tomescu Gh., 11, 12, 39, 44, 56, 58, 73, 93, 104, 107, 121, 124, 125, 137, 154.
Toporescu E., 3.
Trofinov P., 46, 126, 168, 191.
Tuducescu N., 119.
Tunaru R. Tr.. 61, 77, 108, 110, 151, 186, 187, 190.

Țânțăreanu T., 63, 167.
Țepeneag E., 3.
Țichindeal, 149.
Țigoi Z. I., 155, 172, 185.
Țino O., 3.
Țirică St., 108.
Țițeica G., 72, 149.

Udrisky Tr., 29, 42, 56, 73, 91, 104, 105, 108, 122, 138, 139.
Ulman O., 119.
Uroș Mărienuț, 122.
Ursescu Ch., 107.
Ursu V., 13, 27, 104, 122.
Urzică P., 46, 104, 122.

Vaida M., 60, 107, 124.
Vâlcovici V., 3, 14, 27, 30, 54, 90, 110, 115, 126, 142, 147, 152, 158, 174.
Vasilescu Bart., 172, 173, 185, 187, 191,
Vasilescu Mircea, 11, 28, 39, 43, 45, 56, 58, 74, 75, 77, 91, 92, 107, 108, 122. 125, 142, 150.
Vasilescu Gh., 46.
Vasilescu V., 139.
Vasiliu C. Ion., 12. 13, 27, 28, 39, 41, 42, 44, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 74, 75, 78. 91, 92, 105, 107, 108, 109, 110, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 150, 151, 152, 153, 155, 192.
Vasiliu Gh., 3.
Vasiliu Gh. Gh., 12, 14, 58, 60, 74, 107, 124, 126, 152, 153, 170, 172, 173.
Vasiliu M., 3, 151.
Vasiliu G. N., 74, 107, 124,
Vasiliu N. St., 173, 183, 185, 187, 190.
Vasiliu Toma, 170, 172.
Velea G. M., 155, 173.
Vlad V. Oct., 125.
Vlad I. V., 3.
Vlădea I., 153, 159, 171, 172, 173, 183, 185, 186, 187, 188, 190.
Vlădeanu Tib., 12, 13, 60, 107, 124, 125, 169.
Vlădoianu Tib., 74.
Vlăduț S., 12, 13, 30, 74, 75, 91, 104, 107, 108, 122, 124, 137, 150.
Vlațiu Laurențiu, 61, 73, 77, 90, 108, 110, 122, 125, 139, 151,
Vișoianu I. Ion, 12, 107, 108, 124.
Voiculescu St., 124, 126.
Voinescu D. I., 173.
Vulpanovici B., 45, 46, 153.
Vulpe Tib., 29.

Wagner I., 29, 46, 74, 78, 124, 154.
Wallechner E., 46, 153, 154, 187.
Weiss Leon, 55, 56, 117.
Weiss S., 12, 13, 39, 45, 58, 59, 60, 63, 74, 75, 78, 91, 93, 104, 110, 122, 125, 137, 138, 139, 142, 151, 171, 181.
Westfried I., 46.
Wetter Ana, 42, 44, 58, 74, 75, 78, 91, 107, 119, 122, 190.

Zamfirescu A., 28, 78, 122, 137.
Zapan Gr., 3, 9, 14.
Zarda I. I., 171, 173.
Zoican A. A., 27, 28, 58, 74, 107.

BIBLIOTECA ASTRA"
SIBIU

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

5 lei